Thomas Tack / Hans Walser: **Streuellipsen und Steiner-Ellipsen (Kurzfassung)**

Definition:
Sei W eine ebene Punktwolke aus mindestens drei Punkten, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Die Ellipsen mit der Gleichung $\vec{x}^t K^{-1}\vec{x} = k^2$ (K Kovarianzmatrix) sowie ihre Translationen heißen **Streuellipsen** von W. Die Ellipse mit $k = 1$ heißt "**Standardstreuellipse**". Aus der Definition folgt, dass $\det(K) > 0$. Die Ellipsen sind also wohldefiniert.

Satz: Die Steiner-Ellipsen eines Dreiecks sind Streuellipsen.

Beweis:
Jedes ebene Dreieck kann mit Ähnlichkeitsabbildungen auf ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(-2\,|\,0)$, $B(1+b\,|\,c)$, $C(1-b\,|\,-c)$ mit $c \neq 0$ abgebildet werden. Es genügt also, die Behauptung für dieses Dreieck zu zeigen. Sein Schwerpunkt ist $(0\,|\,0)$. Es gilt:

$$V_x = \frac{6+2b^2}{3}, \quad V_y = \frac{2c^2}{3}, \quad C_{xy} = \frac{2bc}{3}.$$

Für $b = 0$, $c = \sqrt{3}$ ist das Dreieck gleichseitig. Seine Steiner-Innenellipse ist aus Symmetriegründen der Innenkreis: $x^2 + y^2 = 1$. Die Umellipse ist: $x^2 + y^2 = 4$.

Die durch $M = \begin{bmatrix} 1 & b/\sqrt{3} \\ 0 & c/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ gegebene affine Abbildung bildet das gleichseitige Dreieck auf

das Dreieck ABC ab. Der Innenkreis geht dabei in die Steiner-Innenellipse über.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch: $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -b/c \\ 0 & \sqrt{3}/c \end{bmatrix}$.

Einsetzen in die Kreisgleichung ergibt: $\left(\begin{bmatrix} 1 & -b/c \\ 0 & \sqrt{3}/c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 1$

Diese Ellipsengleichung wird umgeformt: $c^2x^2 - 2bcxy + (3 + b^2)y^2 = c^2$
Andererseits gilt für die Streuellipsen:

$$\vec{x}^t K^{-1}\vec{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-b}{2c} \\ \frac{-b}{2c} & \frac{3+b^2}{2c^2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{b}{c}xy + \frac{3+b^2}{2c^2}y^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2bcxy + (3 + b^2)y^2 = 2c^2k^2$$

Der Vergleich zeigt: Die Streuellipse für $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist die Innenellipse.

Streckung mit dem Faktor 2 ergibt für $k = \sqrt{2}$ die Umellipse. □

Korollar: Zu jeder Punktwolke W gibt es Steiner-Ellipsen.
Streuellipsen sind die Ortskurven der Punkte mit Mahalanobis-Abstand k^2 vom Zentrum.