Hans Walser, [20191021]

1 2 3

1 Worum geht es?

Spiel mit Zahlen.

2 Problemstellung

Es ist:

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3 \qquad (1)$$

Gibt es weitere drei aufeinanderfolgende Zahlen mit der entsprechenden Eigenschaft?

3 Bearbeitung

Wir nennen die drei Zahlen z, $z + 1$, $z + 2$. Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\begin{aligned} z+(z+1)+(z+2) &= z(z+1)(z+2) \\ 3(z+1) &= z(z+1)(z+2) \end{aligned} \qquad (2)$$

Die erste Lösung (Faktor $(z+1)=0$) dieser kubischen Gleichung ist $z_1 = -1$. Daraus ergeben sich die drei Zahlen $-1, 0, +1$.

Division durch $(z+1)$ führt auf die quadratische Gleichung

$$0 = (z-1)(z+3) \qquad (3)$$

Dies ergibt die beiden Lösungen $z_2 = 1$ und $z_3 = -3$. Die zugehörigen Lösungstripel sind 1, 2, 3 und $-3, -2, -1$.

Wenn wir die Lösungstripel als kartesische Koordinaten deuten, erhalten wir drei kollineare äquidistante Punkte (Abb. 1). Der Abstand von Punkt zu Punkt:

$$2\sqrt{3} \qquad (4)$$

Der Richtungsvektor der Geraden ist:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

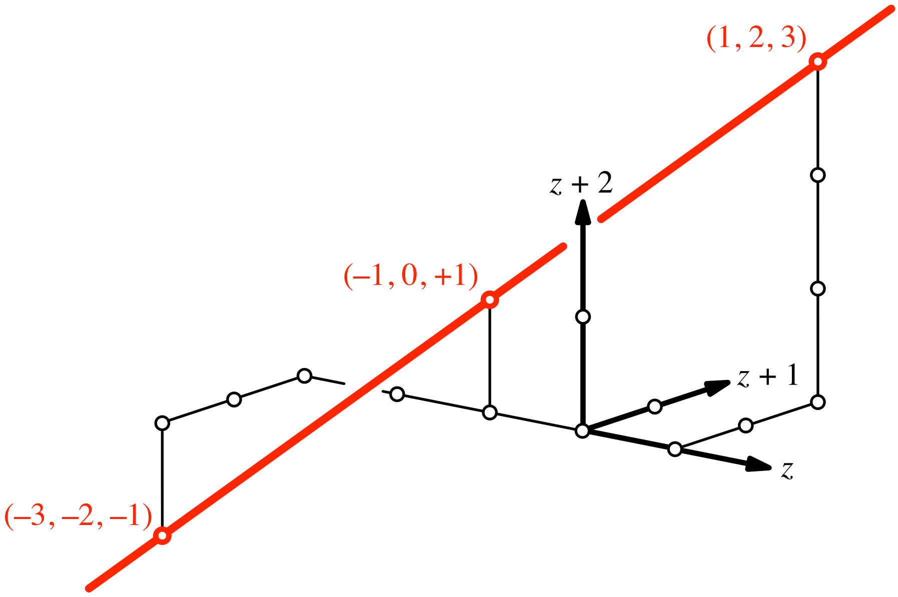

Abb. 1: Kollineare äquidistante Punkte

4 Verallgemeinerung

Wir fragen nach n aufeinanderfolgenden Zahlen mit der zu (1) analogen Bedingung:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(z+k) = \prod_{k=0}^{n-1}(z+k) \tag{6}$$

4.1 Zwei Zahlen

Wir haben die Bedingung:

$$\begin{aligned} z+(z+1) &= z(z+1) \\ 2z+1 &= z^2+z \\ 0 &= z^2-z-1 \end{aligned} \tag{7}$$

Die Lösungen sind der goldene Schnitt (Walser 2013). Mit

$$\Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{8}$$

erhalten wir die Zahlenpaare

$$\Phi, \Phi+1 \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{\Phi}, -\tfrac{1}{\Phi}+1 \tag{9}$$

oder umgeformt:

$$\Phi, \Phi^2 \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{\Phi}, \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 \tag{10}$$

Die nach (6) zugehörigen Summen beziehungsweise Produkte sind:

$$\Phi^3 \quad \text{und} \quad \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^3 \tag{11}$$

Wir haben keine ganzzahlige, sondern irrationale Lösungen.

4.2 Vier Zahlen

Für vier Zahlen liefert die Bedingung (6) bezüglich z die beiden nicht ganzzahligen Lösungen:

$$z_1 \approx -1.369884604, \quad z_2 \approx 0.5732719635 \tag{12}$$

4.3 Fünf Zahlen

Für fünf Zahlen liefert die Bedingung (6) bezüglich z die folgenden fünf Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= -2 \\ z_2 &= -2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{29}} \\ z_3 &= -2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{29}} \\ z_4 &= -2 - \tfrac{i}{2}\sqrt{-10+2\sqrt{29}} \\ z_5 &= -2 + \tfrac{i}{2}\sqrt{-10+2\sqrt{29}} \end{aligned} \tag{13}$$

4.4 19 Zahlen

Für 19 Zahlen erhalten wir folgende numerischen Lösungen bezüglich z:

$$\begin{gathered}-18.00000000,-17.00000000,-16.00000000,-15.00000000,\\-14.00000000,-13.00000000,-12.00000000,-11.00000000,\\-10.00000000,-9,-8.000000000,-7.000000000,-6.000000000,\\-5.000000000,-4.000000000,-3.000000000,-2.000000000,\\-1.000000000,2.670884392*10^{(-14)}\end{gathered}\tag{14}$$

Wir haben eine ganzzahlige Lösung, nämlich 9. Die übrigen Lösungen sind offenbar nur näherungsweise ganzzahlig.

4.5 Vermutung

Für eine ungerade Anzahl $u = 2m + 1$, $u > 3$, von Zahlen haben wir die Zahl $-m$ als ganzzahlige Lösung bezüglich z. Die übrigen Lösungen sind nicht ganzzahlig, nähern sich aber für große u ganzen Zahlen an. Für eine gerade Anzahl g von Zahlen haben wir keine ganzzahlige Lösung. Für große g nähern sich die Lösungen aber ganzen Zahlen an.

Wir haben somit ein Paritätsproblem.

Diese Vermutung wird in einer folgenden Studie untersucht.

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Websites

Lehrer Lämpel: 1 2 3
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/1/1_2_3/1_2_3.htm