Hans Walser, [20210128], [2020203]

7 Dreiecke

1 Worum geht es?

Eine Flächeninvariante mit sieben gleichseitigen Dreiecken

2 Schritt um Schritt

Wir fügen drei rote gleichseitigen Dreiecke an einer Ecke aneinander (Abb. 1).

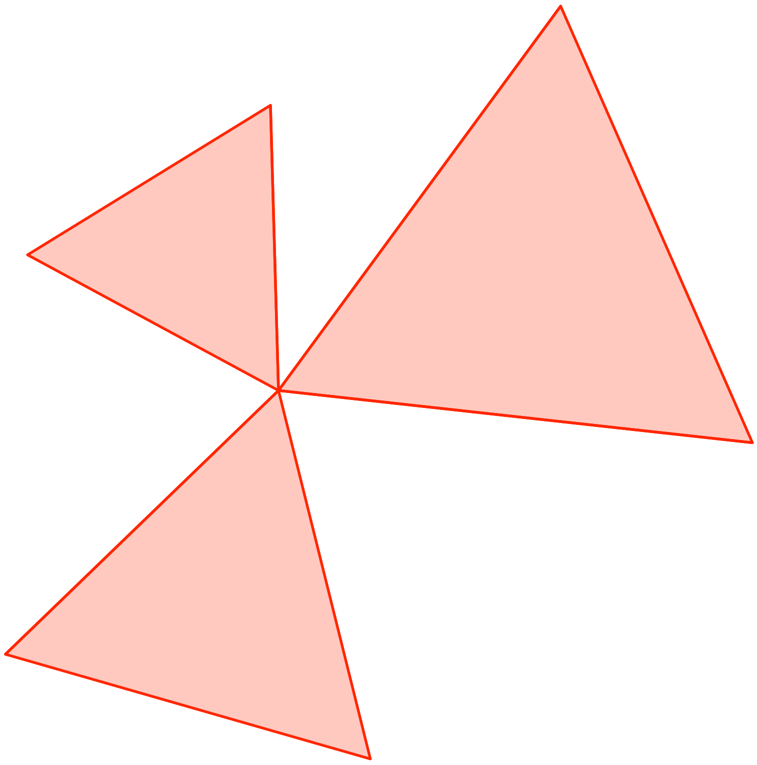

Abb. 1: Drei rote gleichseitige Dreiecke

An die freien Außenecken setzen wir blaue gleichseitige Dreiecke mit der Spitze nach innen an (Abb. 2).

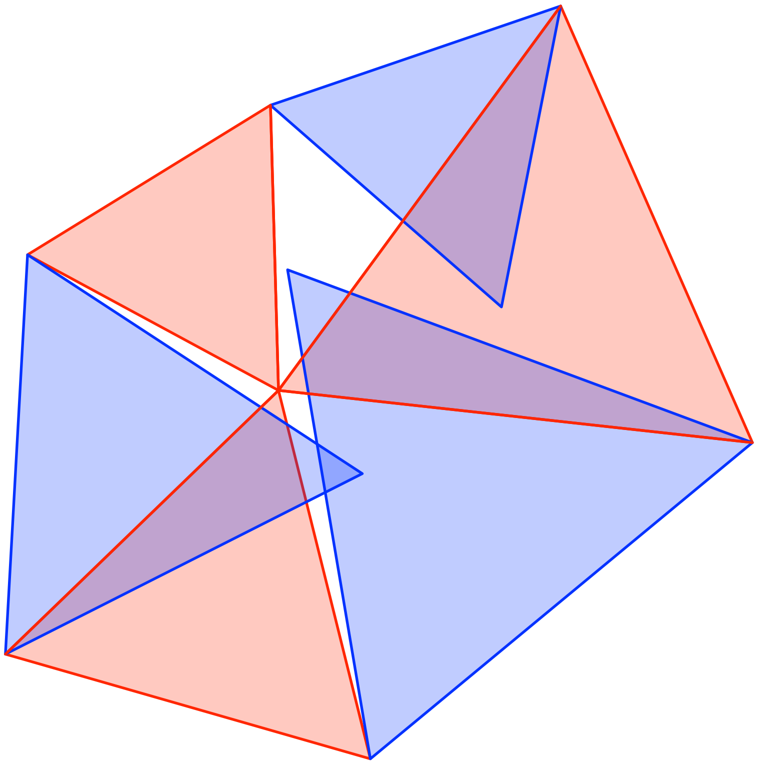

Abb. 2: Drei blaue gleichseitige Dreiecke mit der Spitze nach innen

Dann gilt folgendes:

Die freien inneren Spitzen der blauen Dreiecke sind die Ecken eines weiteren gleichseitigen Dreieckes.

Dieses zeichnen wir wieder rot (Abb. 3).

Wir haben also eine Art Schließungsfigur mit sieben gleichseitigen Dreiecken.

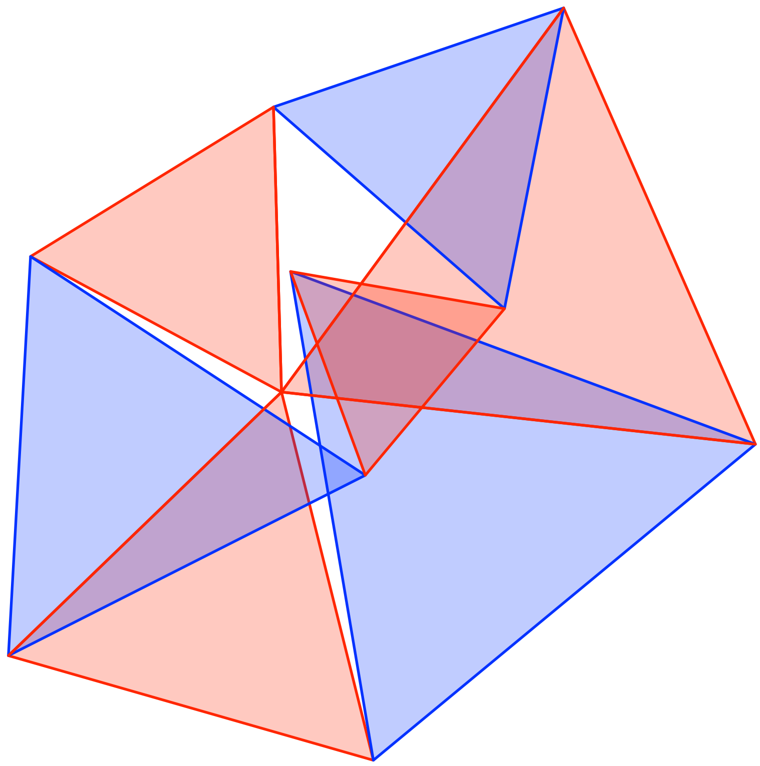

Abb. 3: Siebentes gleichseitiges Dreieck. Rot = blau

Weiter gilt die Flächenbeziehung:

Die Flächensumme der vier roten Dreiecke ist gleich der Flächensumme der drei blauen Dreiecke.

3 Beweise

Der Beweis ist eine idyllische Rechenaffäre.

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 4.

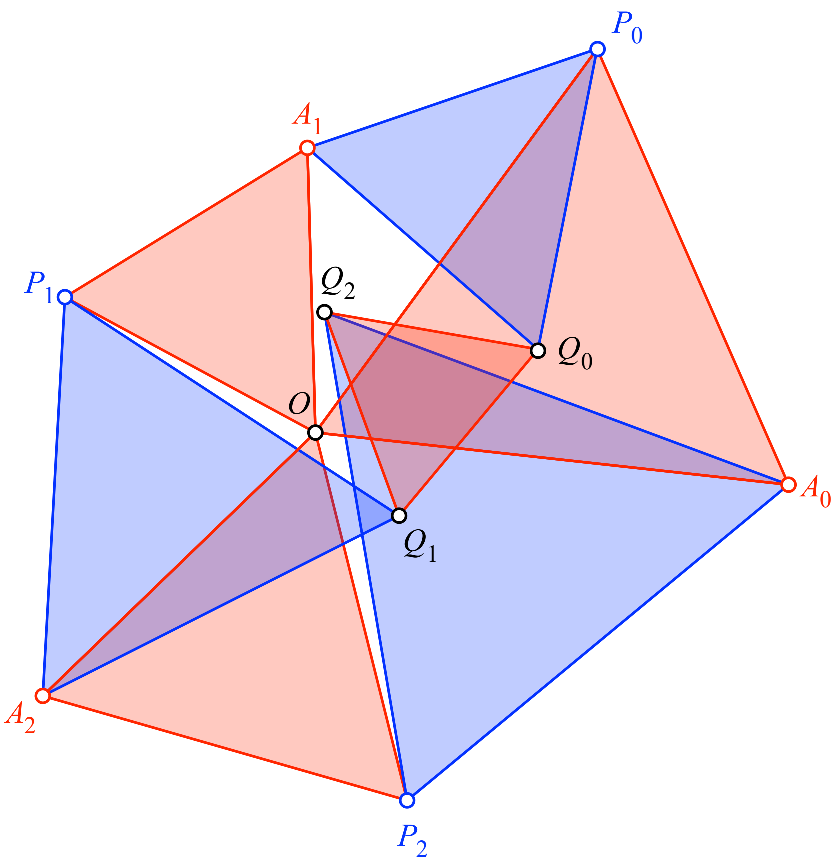

Abb. 4: Bezeichnungen

Der Startpunkt (gemeinsame Ecke der drei roten Startdreiecke) ist der Koordinatenursprung O.

Durch die Wahl von A_0, A_1 und A_2 ist die ganze Konfiguration definiert.

Wir setzen:

$$A_0 := [x_0, y_0]$$

$$A_1 := [x_1, y_1]$$

$$A_2 := [x_2, y_2]$$

Zusammen mit dem Ursprung können wir die Punkte P_i berechnen:

$$P_0 := \left[\frac{x_0}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_0}{2}, \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_0}{2}\right]$$

$$P_1 := \left[\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_1}{2}, \frac{y_1}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_1}{2}\right]$$

$$P_2 := \left[\frac{x_2}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_2}{2}, \frac{y_2}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_2}{2}\right]$$

Weiter berechnen wir die Punkte Q_i:

$$Q_0 := \left[x_0 + \frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_1}{2}, y_0 + \frac{y_1}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_1}{2}\right]$$

$$Q_1 := \left[x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_2}{2}, y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_2}{2}\right]$$

$$Q_2 := \left[x_2 + \frac{x_0}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_0}{2}, y_2 + \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_0}{2}\right]$$

Wir berechnen die dritte Ecke Q_{fin} des durch Q_0 und Q_1 definierten Dreiecks:

$$Qfin := \left[x_2 + \frac{x_0}{2} - \frac{\sqrt{3}\, y_0}{2}, y_2 + \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt{3}\, x_0}{2}\right]$$

Wir sehen, dass dies mit Q_2 übereinstimmt. Damit ist die Schließungseigenschaft gezeigt.

Für die Flächensumme der vier roten Dreiecke erhalten wir:

$$Summerot := \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\left(\left(\left(\left(\frac{y_0}{2}-\frac{y_2}{2}\right)x_1+\left(-\frac{y_0}{2}+\frac{y_1}{2}\right)x_2 - \frac{x_0\left(y_1-y_2\right)}{2}\right)\sqrt{3}+x_1^2+\left(-\frac{x_0}{2}-\frac{x_2}{2}\right)x_1+x_2^2-\frac{x_2 x_0}{2} + y_1^2+\left(-\frac{y_0}{2}-\frac{y_2}{2}\right)y_1+x_0^2+y_0^2-\frac{y_0 y_2}{2}+y_2^2\right)\right)$$

Für die Flächensumme der drei blauen Dreiecke entsprechend:

$$Summeblau := \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\left(\left(\left(\left(\frac{y_0}{2}-\frac{y_2}{2}\right)x_1+\left(-\frac{y_0}{2}+\frac{y_1}{2}\right)x_2 - \frac{x_0\left(y_1-y_2\right)}{2}\right)\sqrt{3}+x_1^2+\left(-\frac{x_0}{2}-\frac{x_2}{2}\right)x_1+x_2^2-\frac{x_2 x_0}{2} + y_1^2+\left(-\frac{y_0}{2}-\frac{y_2}{2}\right)y_1+x_0^2+y_0^2-\frac{y_0 y_2}{2}+y_2^2\right)\right)$$

Die beiden Flächensummen sind gleich. Dies war zu zeigen.