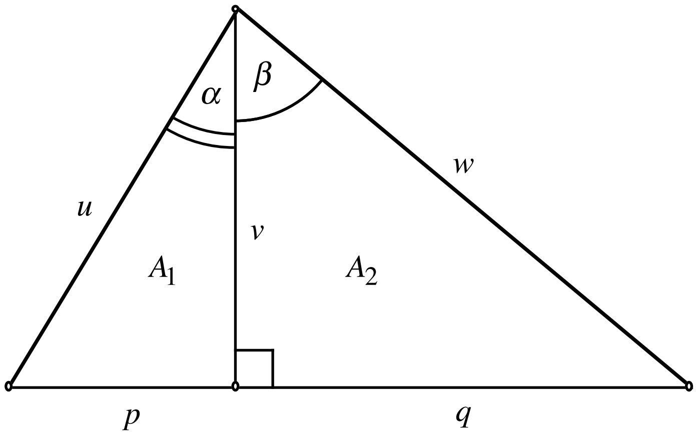
Hans Walser, [20090418a]

Additionstheoreme

1 Herleitung an einem Dreieck

Wir arbeiten in einem Dreieck mit den Bezeichnungen der Figur.



Bezeichnungsfigur

1.1 Additionstheorem für Sinus

Anregung von Chr. P., A.

$$A_\Delta = A_1 + A_2$$

$$\tfrac{1}{2}uw\sin(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}uv\sin(\alpha) + \tfrac{1}{2}vw\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \tfrac{v}{w}\sin(\alpha) + \tfrac{v}{u}\sin(\beta)$$

Nun ist aber $\frac{v}{u} = \cos(\alpha)$ und $\frac{v}{w} = \cos(\beta)$. Eingesetzt ergibt:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

1.2 Additionstheorem für den Kosinus

1.2.1 Direktes Vorgehen

Wir verwenden den Kosinussatz.

$$p^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos(\alpha)$$

$$q^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cos(\beta)$$

$$(p+q)^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\alpha+\beta)$$

Andererseits ist aber:

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= p^2 + q^2 + 2pq \\ &= u^2 + v^2 - 2uv\cos(\alpha) + v^2 + w^2 - 2vw\cos(\beta) + 2pq\end{aligned}$$

Vergleich liefert:

$$u^2+w^2-2uw\cos(\alpha+\beta)=u^2+v^2-2uv\cos(\alpha)+v^2+w^2-2vw\cos(\beta)+2pq$$

$$-2uw\cos(\alpha+\beta)=2v^2-2uv\cos(\alpha)-2vw\cos(\beta)+2pq$$

$$\cos(\alpha+\beta)=-\tfrac{v^2}{uw}+\tfrac{v}{w}\cos(\alpha)+\tfrac{v}{u}\cos(\beta)-\tfrac{pq}{uw}$$

Wegen $\frac{v}{u}=\cos(\alpha)$, $\frac{v}{w}=\cos(\beta)$, $\frac{p}{u}=\sin(\alpha)$ und $\frac{q}{w}=\sin(\beta)$ erhalten wir:

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

1.2.2 Basierend auf Additionstheorem für Sinus

Wir gehen davon aus, dass die Formel

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

gegeben ist. Das Additionstheorem für den Kosinus können wir daraus auf zwei verschiedenen Wegen herleiten. — Mit beiden Methoden kann auch umgekehrt das Additionstheorem des Sinus aus dem des Kosinus hergeleitet werden.

1.2.2.1 Überschieben

Wir verwenden die Relationen $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha)$ und $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\alpha)$:

$$\sin\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\sin\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(\beta)+\cos\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Bei dieser Herleitung wurde das Bogenmaß vorausgesetzt. Im Gradmaß muss $\frac{\pi}{2}$ durch 90° ersetzt werden.

1.2.2.2 Ableiten

Wir verwenden die Relationen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\sin(\alpha)=\cos(\alpha)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\cos(\alpha)=-\sin(\alpha)$. Wir leiten nun die Terme des Additionstheorems für den Sinus auf beiden Seiten partiell nach α ab:

$$\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\sin(\alpha+\beta)=\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\right)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Bei dieser Herleitung wurde das Bogenmaß vorausgesetzt. Bei Verwendung des Gradmaßes erhalten wir auf beiden Seiten die innere Ableitung $\frac{2\pi}{360°}$ als Faktor und müssen dann durch diesen Faktor dividieren. — Derselbe Trick geht auch bei den Additionstheoremen der hyperbolischen Funktionen.

2 Herleitung über Drehmatrizen

Die Additionstheoreme lassen sich einfach über Drehmatrizen herleiten:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Andererseits ist die Zusammensetzung zweier Drehungen mit den Drehwinkeln α und β eine Drehung um $\alpha + \beta$. Daher ist:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Vergleich ergibt die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus.