Hans Walser, [20140504a]

Additionstheoreme

Ausarbeitung einer Idee von R. Sch., C.

1 Worum geht es?

Anhand des regelmäßigen $2n$-Eckes werden acht trigonometrische Summenformeln hergeleitet. Dabei ist eine Paritätsunterscheidung bezüglich n erforderlich.

2 Gerades n

Die Eckenzahl $2n$ ist also durch vier teilbar.

2.1 Basislinie horizontal

Wir arbeiten zunächst mit dem regelmäßigen $2n$-Eck gemäß Abbildung 1. In der Abbildung 1 ist $n = 6$.

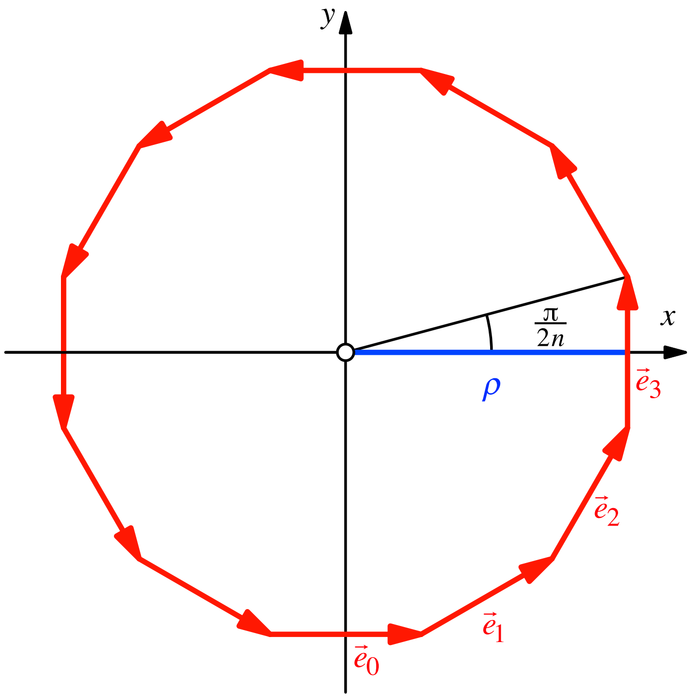

Abb. 1: Überlegungsfigur

Die eingezeichneten Vektoren sind Einheitsvektoren, also:

$$\vec{e}_j = \begin{bmatrix} \cos\left(j\frac{\pi}{n}\right) \\ \sin\left(j\frac{\pi}{n}\right) \end{bmatrix}$$

Für den Inkreisradius ρ erhalten wir:

$$\rho = \tfrac{1}{2}\cot\left(\tfrac{\pi}{2n}\right)$$

Den Inkreisradius können wir auch durch Projektionen von geeigneten Einheitsvektoren auf die x-Achse ausdrücken (Abb. 2).

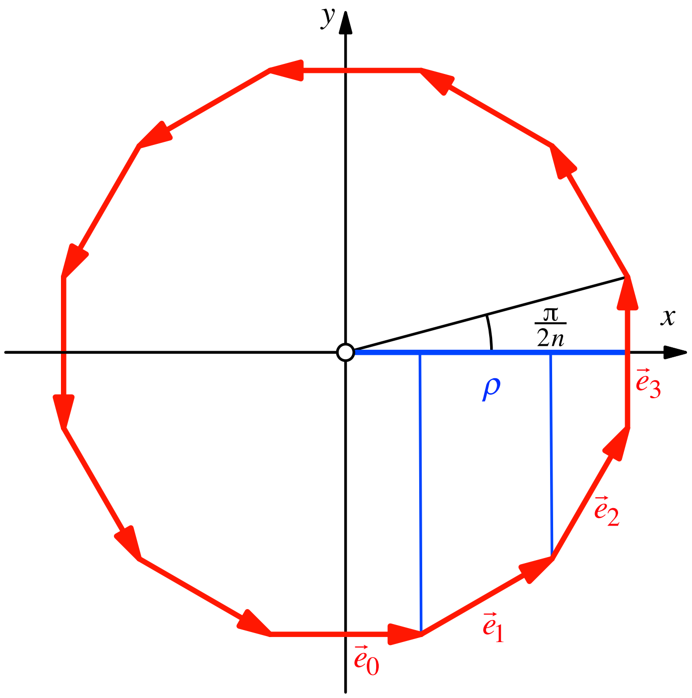

Abb. 2: Projektionen

So erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \cos\left(j\frac{\pi}{n}\right) \tag{1}$$

Durch analoge Projektion auf die y-Achse ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(j\frac{\pi}{n}\right) \tag{2}$$

2.2 Spitzständig

Wir drehen das regelmäßige $2n$-Eck der Abbildung 1 um $-\frac{\pi}{2n}$. Dadurch erhalten wir ein regelmäßiges $2n$-Eck, das auf einer Spitze steht (Abb. 3).

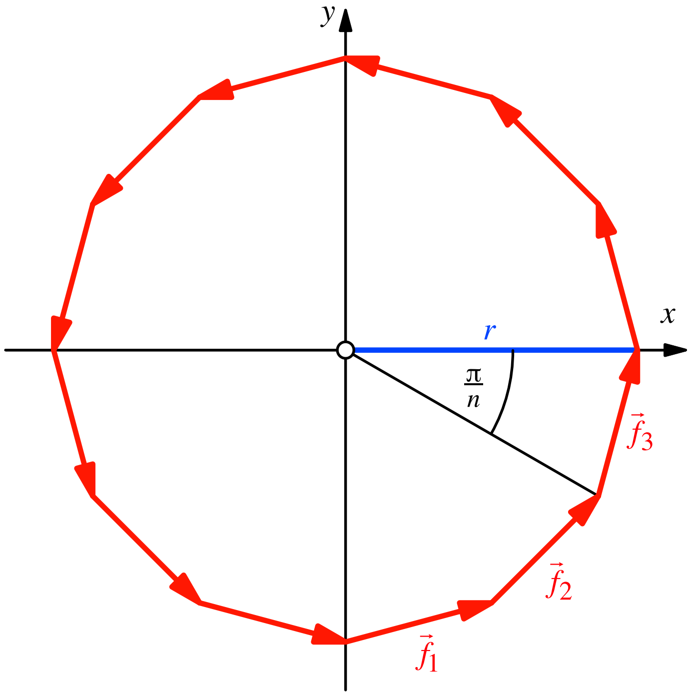

Abb. 3: Spitzständiges 2*n*-Eck

Die eingezeichneten Vektoren sind Einheitsvektoren, also:

$$\vec{f}_j = \begin{bmatrix} \cos\left(j\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left(j\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \end{bmatrix}$$

Für den Umkreisradius r erhalten wir:

$$r = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Durch Projektion auf die x- beziehungsweise y-Achse ergeben sich die Formeln:

$$\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \cos\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \qquad (4)$$

3 Ungerades *n*

Die Eckenzahl $2n$ ist nun kongruent 2 modulo 4. Die Abbildungen illustrieren den Fall $n=5$.

3.1 Bodenständig

Die Abbildung 4 illustriert den Fall mit horizontaler Basislinie.

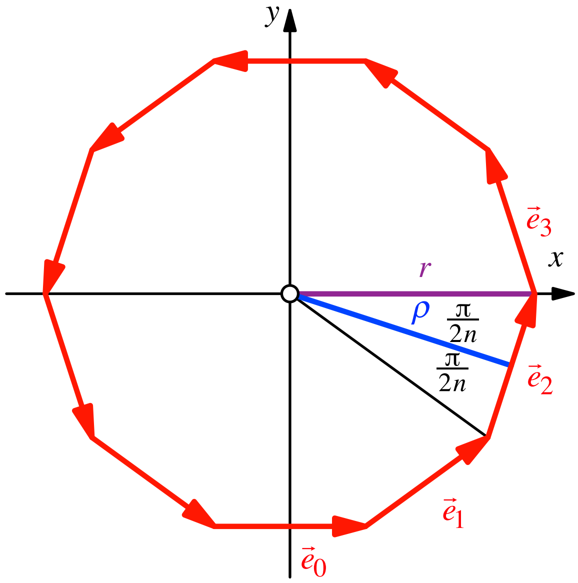

Abb. 4: Ungerades *n*. Horizontale Basislinie

Für die Einheitsvektoren gilt wiederum:

$$\vec{e}_j = \begin{bmatrix} \cos\left(j\frac{\pi}{n}\right) \\ \sin\left(j\frac{\pi}{n}\right) \end{bmatrix}$$

Für den Umkreisradius r erhalten wir ebenfalls:

$$r = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Für den Inkreisradius ρ erhalten wir wiederum:

$$\rho = \tfrac{1}{2}\cot\left(\tfrac{\pi}{2n}\right)$$

Projektionen ergeben:

$$\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(j\frac{\pi}{n}\right) \tag{5}$$

$$\tfrac{1}{2}\cot\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(j\frac{\pi}{n}\right) \tag{6}$$

3.2 Spitzständig

Wir drehen um $-\frac{\pi}{2n}$ und erhalten die Figur der Abbildung 5.

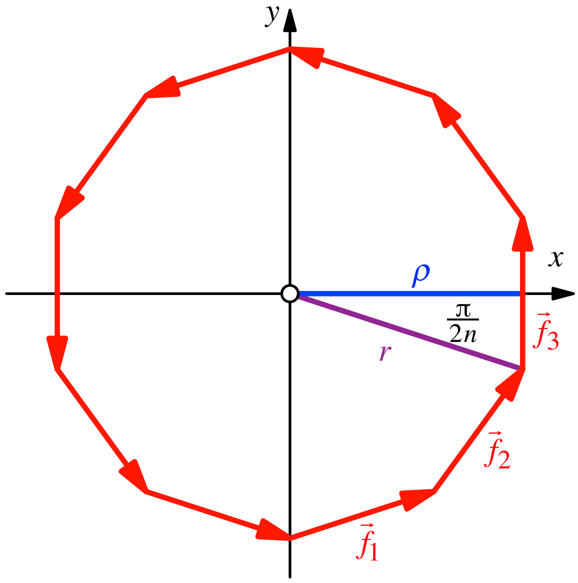

Abb. 5: Ungerades *n*. Spitzständig

Die eingezeichneten Vektoren sind Einheitsvektoren, also:

$$\vec{f}_j = \begin{bmatrix} \cos\left(j\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left(j\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \end{bmatrix}$$

Durch Projektion erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right) \tag{8}$$