Hans Walser, [20190517]

# Al-Sijzī

## 1 Worum geht es?

Es wird ein Theorem des persischen Mathematikers Al-Sijzī (zweite Hälfte des 10. Jahrhunderts) verallgemeinert.

## 2 Das Theorem des Al-Sijzī

Wir beginnen mit einer Strecke $A_1A_2$ und deren Mittelpunkt $M$. Um $M$ zeichnen wir einen Kreis mit beliebigem Radius und wählen darauf einen Punkt $P$. Die Abbildung 1 zeigt zwei verschiedene Wahlen des Punktes $P$. Den Kreis lassen wir unverändert.

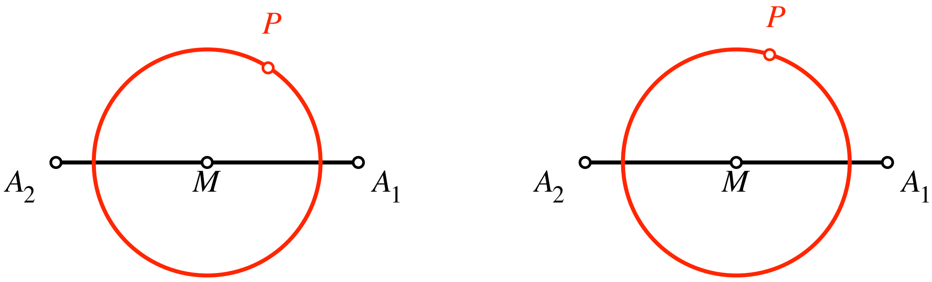


**Abb. 1: Startfigur**

Nun zeichnen wir je ein Quadrat mit den Seitenlängen $PA_1$ und $PA_2$ (Abb. 2).

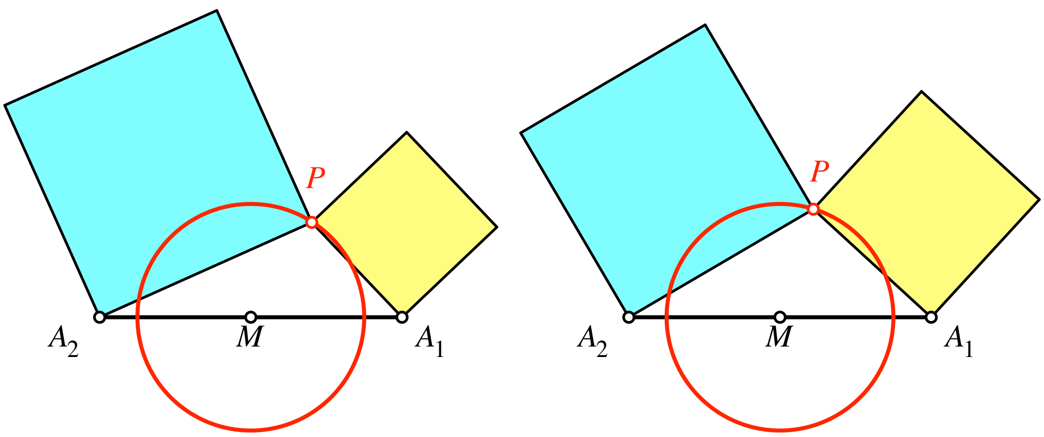


**Abb. 2: Quadrate**

Das Theorem des Al-Sijzī besagt nun, dass die Summe der beiden Quadratflächen eine Invariante ist, unabhängig von der Wahl des Punktes $P$ auf dem Kreis.

Bemerkung: Für den Sonderfall des Kreises durch die Endpunkte der Strecke $A_1A_2$ ist das der gute alte Satz des Pythagoras. Der Satz des Pythagoras gibt allerdings zusätzlich eine Information über die Größe der Summe der beiden Quadratflächen.
Die Abbildung 3 zeigt eine leicht modifizierte Anordnung des einen Quadrates.

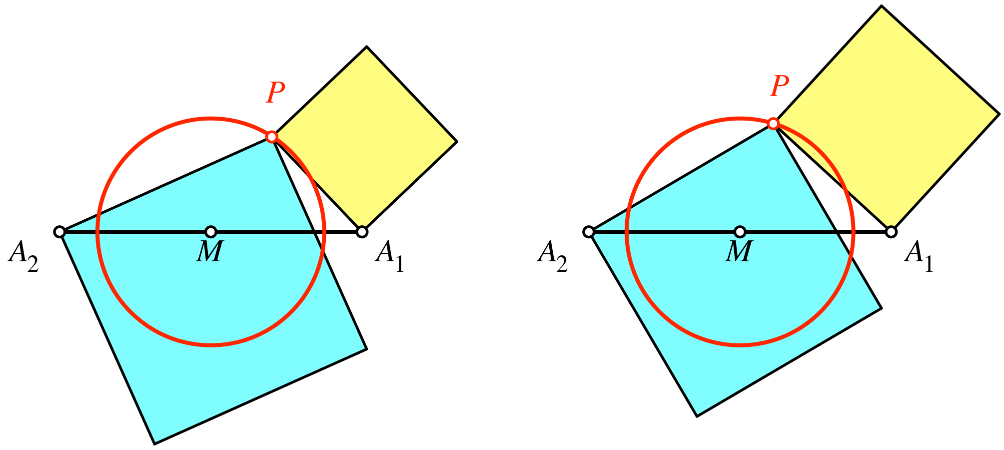


**Abb. 3: Modifizierte Anordnung**

Diese Modifikation erlaubt eine systematische Darstellung in der folgenden Verallgemeinerung.

## 3 Verallgemeinerung

Wir interpretieren die Strecke $A_1A_2$ als Zweieck und verallgemeinern auf ein regelmäßiges $n$-Eck (Abb. 4 für $n = 5$).

Um den Mittelpunkt $M$ eines regelmäßigen $n$-Eckes $A_1 \ldots A_n$ zeichnen wir einen Kreis mit beliebigem Radius und wählen darauf einen beliebigen Punkt $P$. Den Kreis lassen wir im folgenden fest, variieren aber den Punkt $P$.

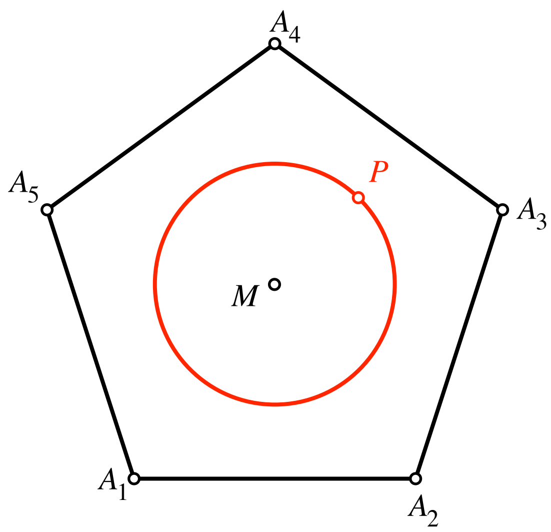


**Abb. 4: Startfigur**

Nun zeichnen wir je ein Quadrat mit der Seitenlänge $PA_k$, $k = 1 \ldots n$ (Abb. 5).

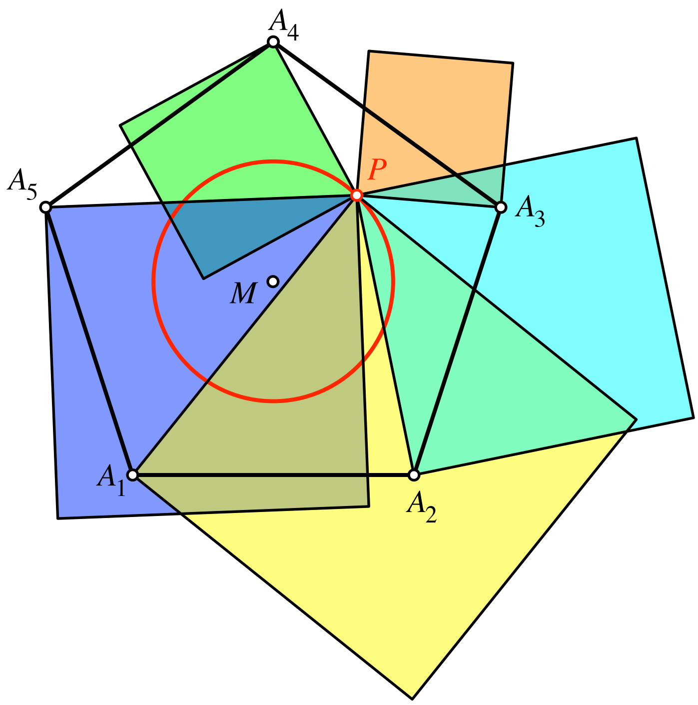


**Abb. 5: Quadrate**

Die Summe der Flächeninhalte dieser $n$ Quadrate ist eine Invariante. Sie ist unabhängig von der Wahl des Punktes $P$ auf dem als fest gedachten Kreis.

## 4 Beweis

Wir setzen $M$ in den Koordinatenursprung und beschreiben das regelmäßige $n$-Eck durch:

$$A_k = \left(\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right), \sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right)\right),\ k = 1 \ldots n \tag{1}$$

Weiter sei $r$ der Radius des Kreises und:

$$P(t) = \left(r\cos(t), r\sin(t)\right) \tag{2}$$

Für die Strecke $PA_k$ und damit für die zugehörige Quadratfläche ergibt sich:

$$\left|PA_k\right|^2 = \left(\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) - r\cos(t)\right)^2 + \left(\sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) - r\sin(t)\right)^2 \tag{3}$$

Daraus ergibt sich für die Summe der Quadratflächen:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) - r\cos(t)\right)^2 + \left(\sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) - r\sin(t)\right)^2\right) \tag{4}$$

Wir haben zu zeigen, dass diese Summe unabhängig von $t$ ist. Wir leiten nach $t$ ab:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(t) &= \sum_{k=1}^{n}\left(2\left(\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) - r\cos(t)\right)r\sin(t) + 2\left(\sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) - r\sin(t)\right)(-r)\cos(t)\right)\\
&= 2r\left(\sin(t)\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right)}_{0} + \cos(t)\underbrace{\sin\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right)}_{0} + r\underbrace{\left(-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t)\right)}_{0}\right)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Aus (5) folgt die Invarianz.

## 5 Variante

Wer Lust hat, kann die in der Abbildung 6 angedeutete Variante beweisen. Bei variieren des roten Punktes auf dem roten Kreis bleibt die Quadratflächensumme invariant.

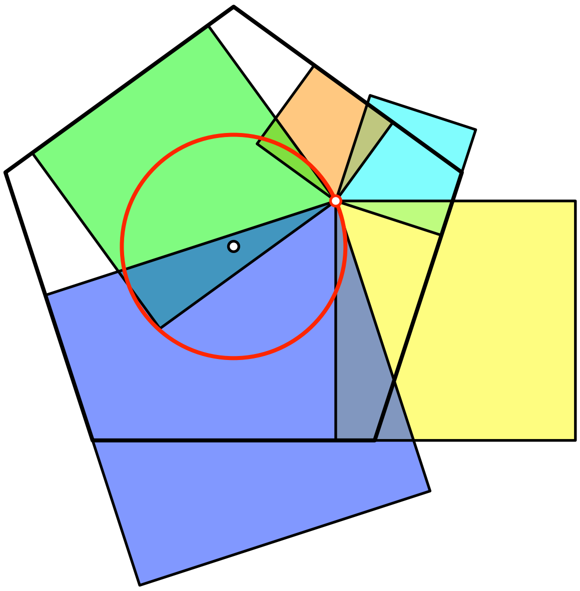

**Abb. 6: Variante**

## 6 Noch eine Verallgemeinerung

Wir ersetzen die Quadrate in der Abbildung 5 durch andere regelmäßige Vielecke, zum Beispiel durch gleichseitige Dreiecke (Abb. 7) oder regelmäßige Fünfecke (Abb. 8). Auch in diesen Fällen ist die Summe der Flächeninhalte invariant.

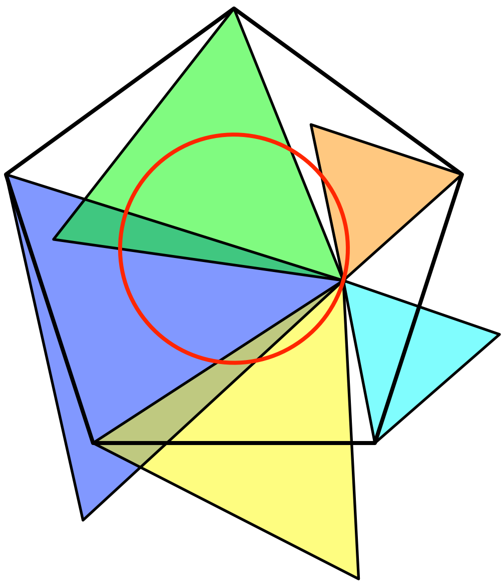

**Abb. 7: Dreiecke statt Quadrate**

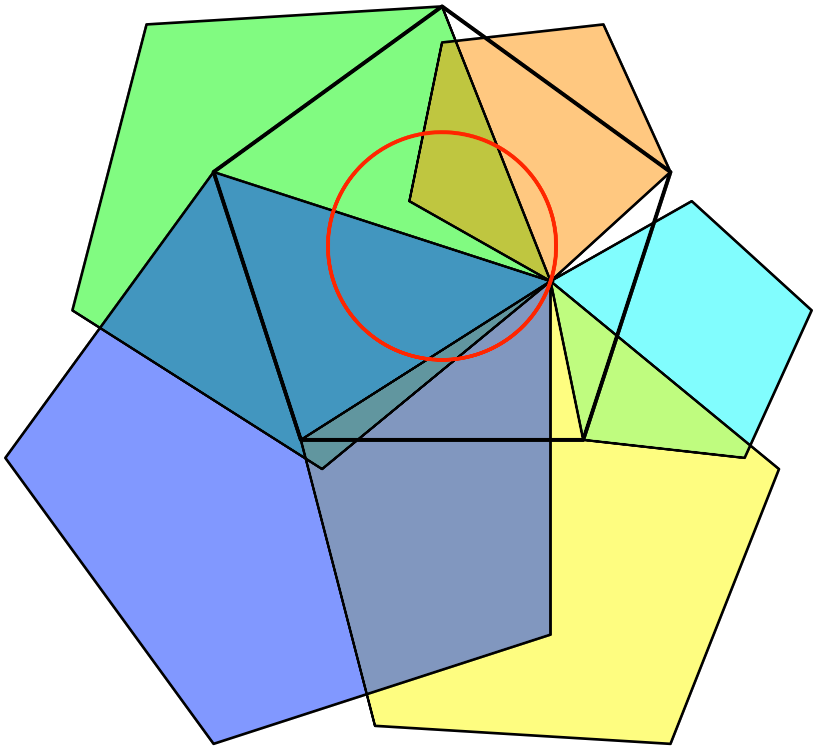

**Abb. 8: Fünfecke statt Quadrate**

## 7 Animation

Dieser Studie ist eine GeoGebra-Animation beigegeben. Mittels Schieber können gewählt werden:

- Die Eckenzahl $n$ des regelmäßigen $n$-Eckes.
- Die Eckenzahl $m$ der eingefügten regelmäßigen $m$-Ecke, deren Flächensumme invariant ist. Diese regelmäßigen $m$-Ecke sind alle in transparentem Blau gegeben.
- Der Radius $r$ des roten Kreises.

## 8 Sonderfälle

- Für $r = 1$ arbeiten wir mit dem Umkreis des regelmäßigen $n$-Eckes.
- Für $r = 1$, $n = 2$ und $m = 4$ ergibt sich die Situation des Satzes von Pythagoras. Die Darstellung ist etwas ungewohnt, indem ein Quadrat nach innen gerichtet ist und das Hypotenusenquadrat fehlt. Das Hypotenusenquadrat ergibt sich als Grenzfall, wenn $P$ auf ein Streckenende zu liegen kommt.

- Für $r = 1$, $n = 3$ und $m = 3$ ergibt sich die Situation der Abbildung 9. Die Flächensumme der blauen Dreiecke ist gleich dem Doppelten des Flächeninhaltes des Startdreiecks. Dies ergibt sich aus einem Grenzfall, wenn $P$ auf eine Dreiecksecke zu liegen kommt.

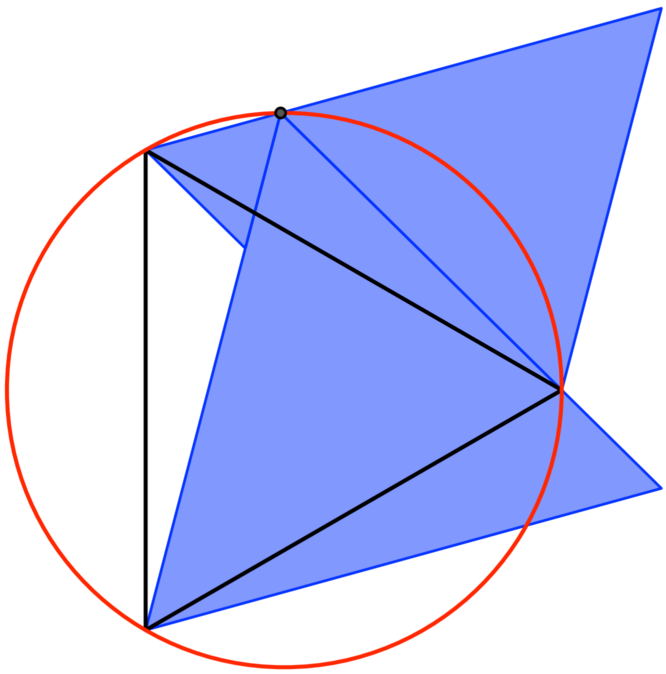

**Abb. 9: Dreiecke**

- Für $r = 1$, $n = 4$ und $m = 4$ ergibt sich die Situation der Abbildung 10. Die Flächensumme der blauen Quadrate entspricht dem Vierfachen des Flächeninhaltes des Startquadrates.

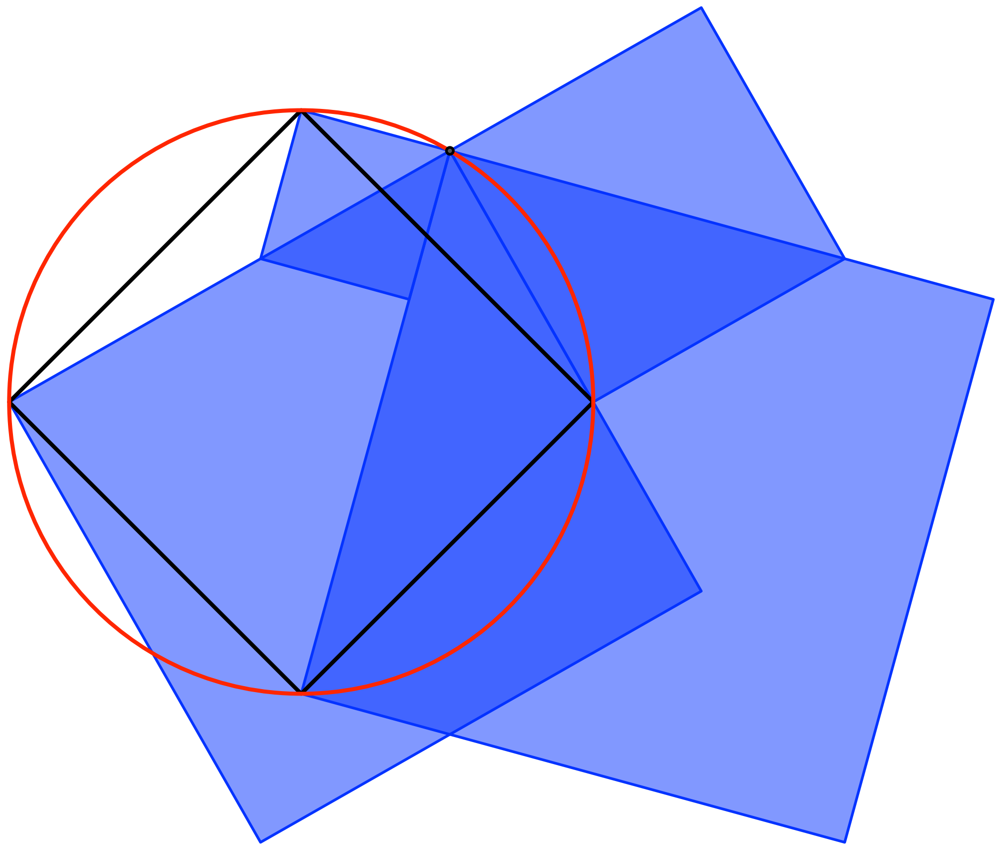

**Abb. 10: Quadrate**

- Für $r = 1$, $n = 20$ und $m = 20$ ergibt sich etwas Lustiges (Abb. 11).

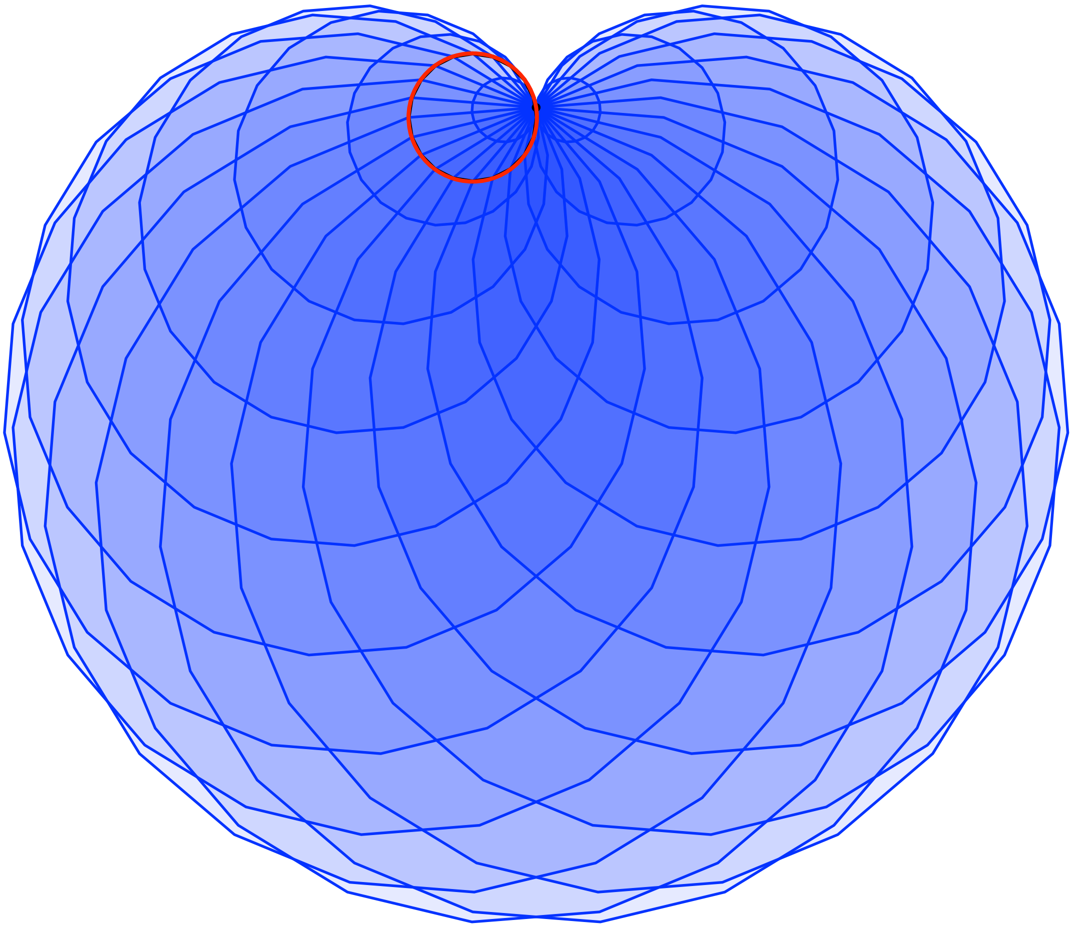

**Abb. 11: 20-Ecke**

## Websites

Hans Walser: Kreisscharen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreisscharen2/Kreisscharen2.htm

Hans Walser: Flächensatz im Dreieck
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Flaechensatz_im_Dreieck/Flaechensatz_im_Dreieck.htm