Hans Walser, [20191219]

Das Theorem des Al-Sijzī

1 Worum geht es?

Es wird ein Theorem des persischen Mathematikers Al-Sijzī (zweite Hälfte des 10. Jahrhunderts) vorgestellt.

2 Beliebiges Dreieck

Wir beginnen mit einem beliebigen Dreieck ABC (Abb. 1). Weiter sei M der Mittelpunkt der Strecke AB und s die von C ausgehende Seitenhalbierende.

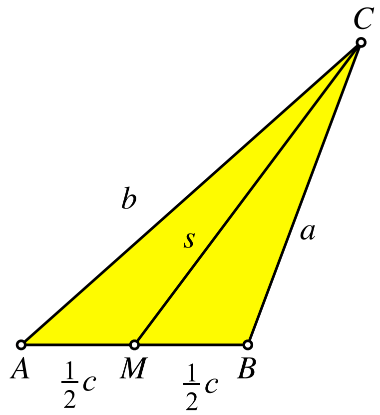

Abb. 1: Dreieck

Wir führen Vektoren ein gemäß Abbildung 2.

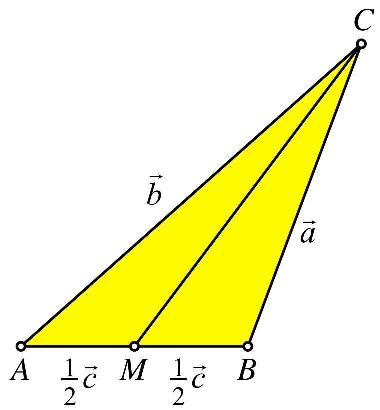

Abb. 2: Vektoren

Es ist:

$$\vec{a} = \vec{s} - \tfrac{1}{2}\vec{c} \quad \text{und} \quad -\vec{b} = \vec{s} + \tfrac{1}{2}\vec{c} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich:

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{s}^{\,2} - \vec{s}\vec{c} + \tfrac{1}{4}\vec{c}^{\,2} \quad \text{und} \quad \vec{b}^{\,2} = \vec{s}^{\,2} + \vec{s}\vec{c} + \tfrac{1}{4}\vec{c}^{\,2} \tag{2}$$

Addition liefert:

$$\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} = 2\vec{s}^{\,2} + \tfrac{1}{2}\vec{c}^{\,2} \tag{3}$$

In der Schreibweise ohne Vektoren heißt dies:

$$a^2 + b^2 = 2s^2 + \tfrac{1}{2}c^2 \tag{4}$$

Dies ist das Theorem des Al-Sijzī.
Wenn nun die Punkte A und B fest bleiben und C auf dem Kreis um M mit Radius s variiert, bleibt die rechte Seite von (4) invariant. Damit ist aber auch die Quadratflächensumme auf der linken Seite von (4) invariant.
Die Abbildung 3 illustriert den Sachverhalt.

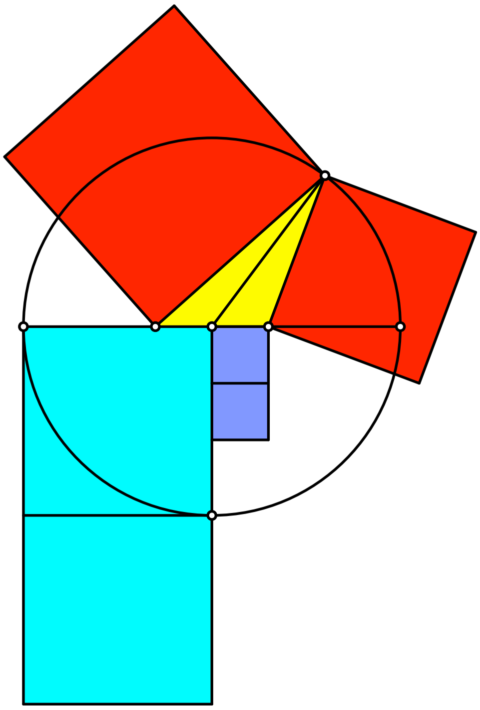

Abb. 3: Theorem des Al-Sijzī: Rot = blau

Die Flächensumme der beiden roten Quadrate entspricht der Flächensumme der vier blauen und hellblauen Quadrate.

Die Abbildung 4 zeigt einen Zerlegungsbeweis für das Beispiel der Abbildung 3.

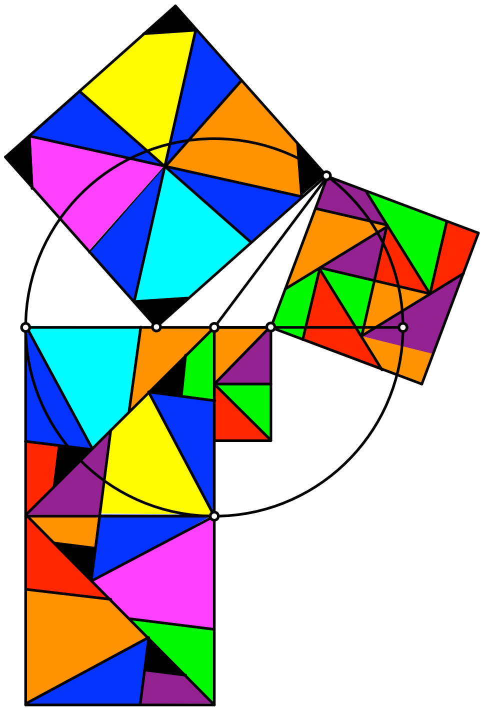

Abb. 4: Zerlegungsbeweis

Die Abbildung 5 zeigt ein Beispiel mit einem stumpfen Winkel bei *C*.

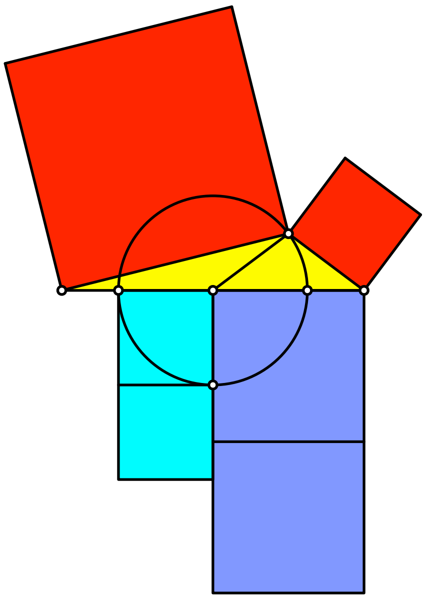

Abb. 5: Oben ein stumpfer Winkel

3 Sonderfall

Für $s = \frac{1}{2}c$ ergibt sich der Satz des Pythagoras. Der Kreis wird zum Thaleskreis.

4 Umbau

Die Figur der Abbildung 3 lässt sich umbauen zur Figur der Abbildung 6. Dazu wird das gelbe Dreieck der Abbildung 3 mit der Seitenhalbierenden halbiert und die beiden Hälften werden neu zusammengesetzt.

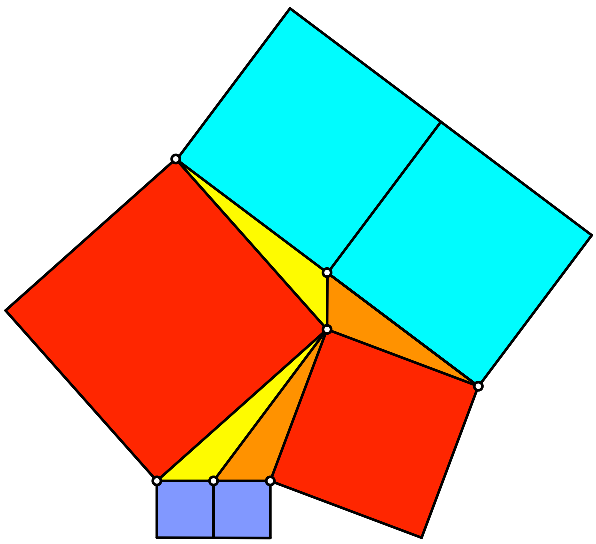

Abb. 6: Rot = blau

Die Abbildung 7 zeigt den entsprechenden Umbau der Abbildung 5.

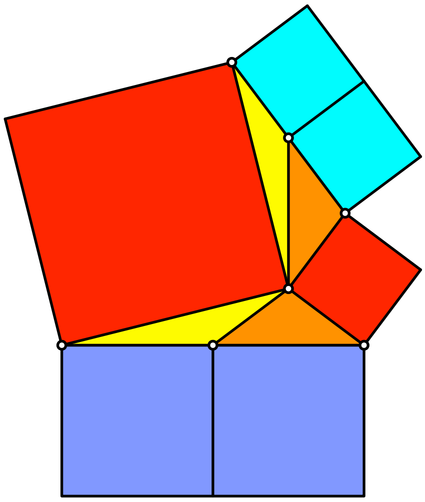

Abb. 6: Rot = blau

5 Ganzzahlig

Es gibt auch, entsprechend zu den pythagoreischen Tripeln, ganzzahlige Lösungen. Die Tabelle 1 gibt einige Beispiele.

a	b	c	s	Bemerkungen
5	5	6	4	Aus pythagoreischen Dreiecken zusammengesetzt
5	5	8	3	Aus pythagoreischen Dreiecken zusammengesetzt
6	8	10	5	Pythagoreisches Dreieck
7	9	8	7	Abb. 8
7	9	14	4	Abb. 9
7	11	12	7	
7	11	14	6	
8	14	14	9	
8	14	18	7	
9	13	10	10	
9	13	20	5	
9	17	16	11	
9	19	20	11	
10	10	12	8	Aus pythagoreischen Dreiecken zusammengesetzt
10	10	16	6	Aus pythagoreischen Dreiecken zusammengesetzt
10	20	18	13	
11	13	16	9	
11	13	18	8	
11	17	12	13	
12	14	14	11	
12	16	20	10	Pythagoreisches Dreieck
13	13	10	12	
14	18	16	14	
15	15	18	12	Aus pythagoreischen Dreiecken zusammengesetzt
17	17	16	15	Aus pythagoreischen Dreiecken zusammengesetzt
17	19	12	17	
17	19	20	15	

Tab. 1: Ganzzahlige Lösungen

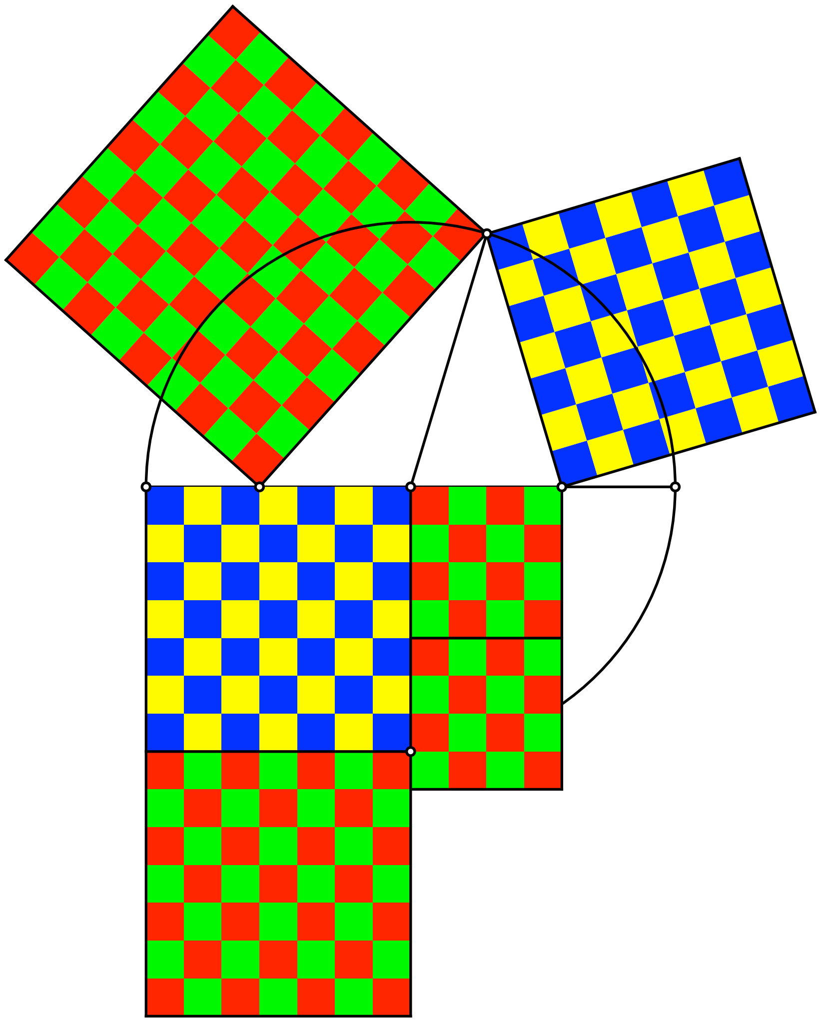

Abb. 8: Ganzzahliges Beispiel

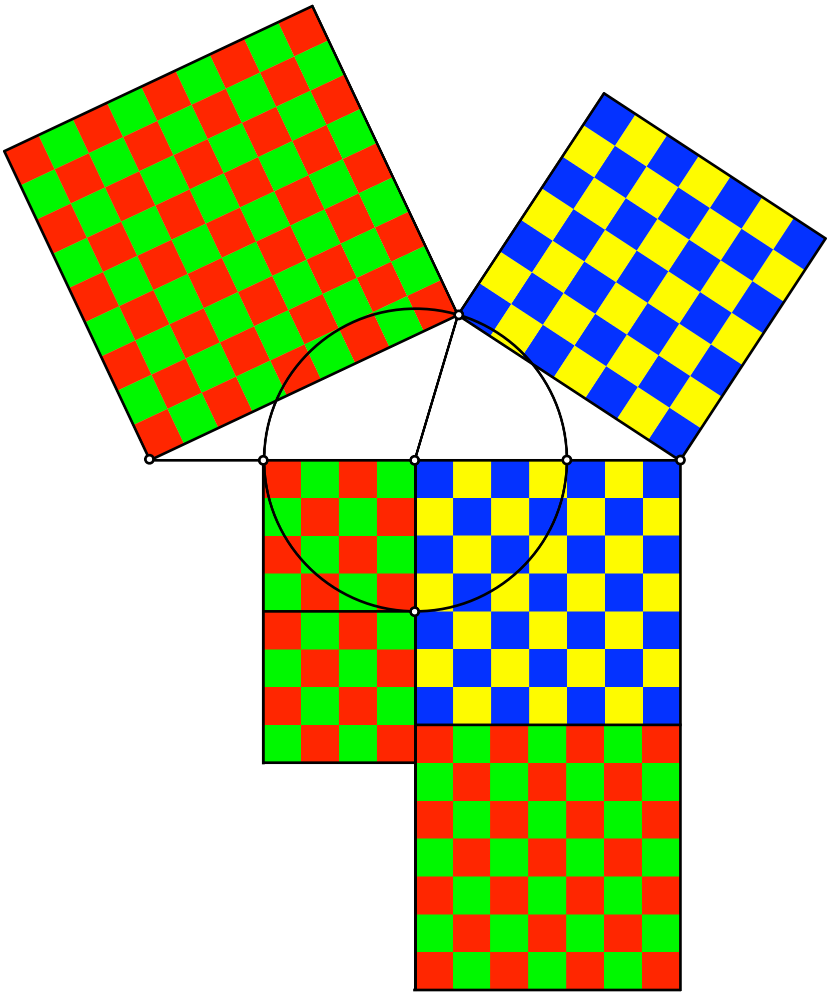

Abb. 9: Ganzzahliges Beispiel

Websites

Hans Walser: Al-Sijzī
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Al-Sijzi/Al-Sijzi.htm

Hans Walser: Pythagoras-Schmetterling
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoras-Schmetterling/Pythagoras-Schmetterling.htm