Hans Walser, [20200101]

Al-Sijzi

Anregung: Z. D., W.

1 Worum geht es?

Kugelproblem. Etwas Rechnung.
Die Idee geht auf al-Sijzi (945-1020) zurück.

2 Problemstellung

Im n-dimensionalen Raum seien m Punkte $A_k\left(x_{k1},...,x_{kn}\right), k=1,...,m$ gegeben.

Gesucht ist die Menge der Punkte $P\left(x_1,...,x_n\right)$ mit der Eigenschaft:

$$\sum_{k=1}^{m}\left|A_k P\right|^2 = c \qquad (1)$$

Dabei ist c eine Konstante.

3 Bearbeitung

Die Bedingung (1) lautet in Koordinaten:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{kj}-x_j\right)^2 = c \qquad (2)$$

Mit einiger Rechnung lässt sich (2) umformen zu:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \tfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{kj}\right)^2 = \tfrac{c}{m} + \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\tfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{kj}\right)^2 - \tfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{kj}^2\right) \qquad (3)$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperkugel im n-dimensionalen Raum. Die Hyperkugel hat den Mittelpunkt M:

$$M\left(\tfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{k1},...,\tfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{kn}\right) \qquad (4)$$

Dies ist der Schwerpunkt der m Punkte $A_k\left(x_{k1},...,x_{kn}\right), k=1,...,m$.

Weiter hat die Hyperkugel den Radius r:

$$r=\sqrt{\frac{c}{m}+\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{kj}\right)^2-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{kj}^2\right)} \tag{5}$$

4 Beispiel

Es sei $n = 3$ und $m = 3$ und weiter:

$$\begin{aligned}&A_1\left(\cos\left(120°\right),\sin\left(120°\right),0\right)\\&A_2\left(\cos\left(240°\right),\sin\left(240°\right),0\right)\\&A_3\left(1,0,0\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Weitere sei $c = 6$. Für (3) ergibt sich mit CAS die Kugelgleichung:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \tag{7}$$

Die Abbildung 1 illustriert den Sachverhalt.

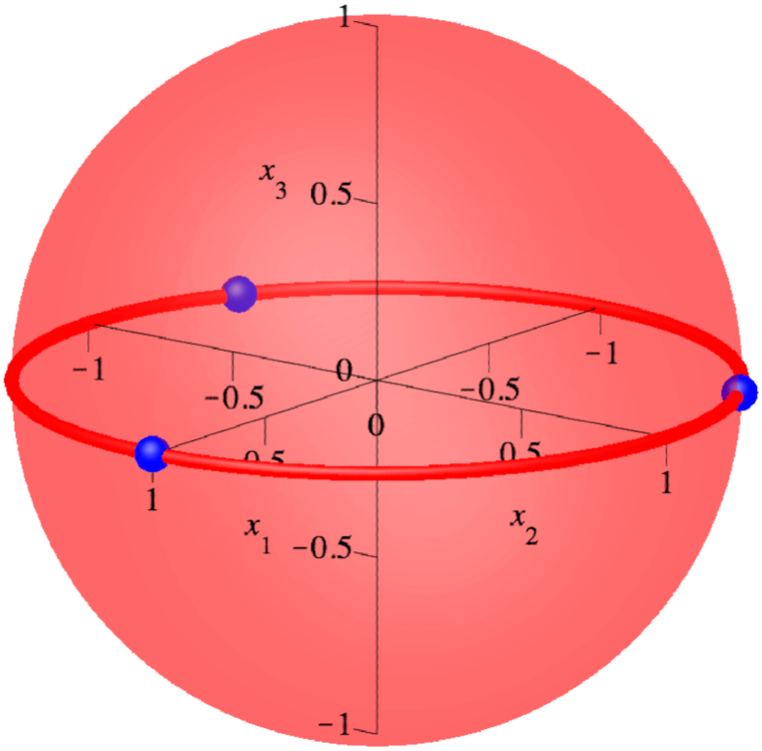

Abb. 1: Kugel

Die drei blauen Punkte auf dem Äquator sind die durch (6) gegebenen Punkte.

Kontrollen:

Ist P einer der drei blauen Punkte, haben wir die Abstände $0, \sqrt{3}, \sqrt{3}$. Die Summe der Quadrate der Abstände ist 6.

Ist P der Nordpol, haben wir dreimal den Abstand $\sqrt{2}$. Die Summe der Quadrate der Abstände ist 6.

Ist $P(-1,0,0)$ (hinten auf dem Äquator), haben wir die Abstände 1, 2, 1. Die Summe der Quadrate der Abstände ist 6.

Websites

Hans Walser: Al-Sijzi
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Al-Sijzi2/Al-Sijzi2.htm