Hans Walser, [20201117]

Archimedische Spirale

1 Worum geht es?

Ähnlichkeit der archimedischen Spiralen

2 Standardspirale und allgemeine Spirale

Die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 6\pi] \tag{1}$$

gibt die archimedische Standardspirale der Abbildung 1a mit drei Windungen. Die obere Grenze des Parameterintervalls kann natürlich beliebig verändert werden. Bei der Obergrenze $2\pi n$ haben wir n Windungen.

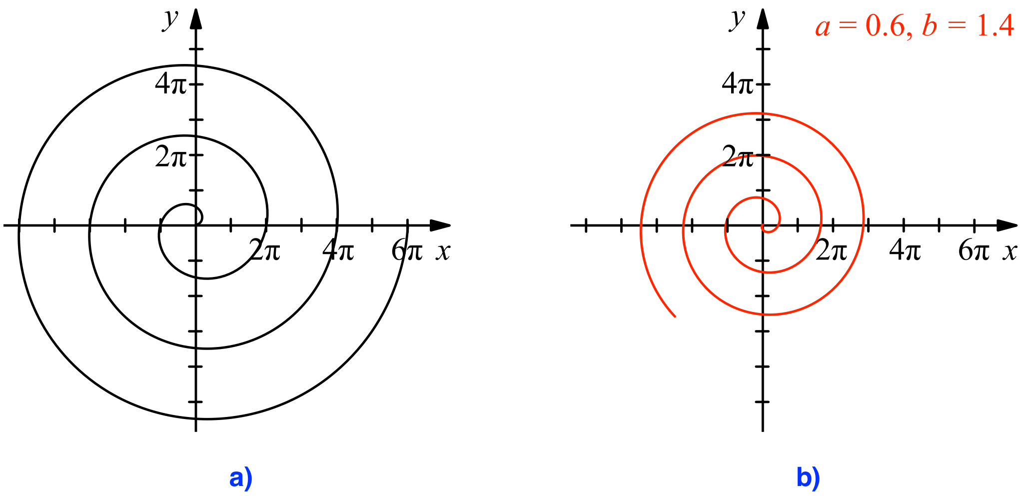


Abb. 1: Standardspirale und allgemeine Spirale

Die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} (at+b)\cos(t) \\ (at+b)\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \left[-\tfrac{b}{a}, -\tfrac{b}{a} + 6\pi\right] \tag{2}$$

gibt die allgemeine Form der archimedischen Spirale mit drei Windungen (Abb. 1b für $a = 0.6$ und $b = 1.4$).

3 Transformation des Parameters

Mit

$$\tau = t + \tfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad t = \tau - \tfrac{b}{a} \tag{3}$$

kann (2) in der Form

$$\vec{x}(\tau) = a \begin{bmatrix} \tau \cos\left(\tau - \tfrac{b}{a}\right) \\ \tau \sin\left(\tau - \tfrac{b}{a}\right) \end{bmatrix}, \quad \tau \in [0, 6\pi] \tag{4}$$

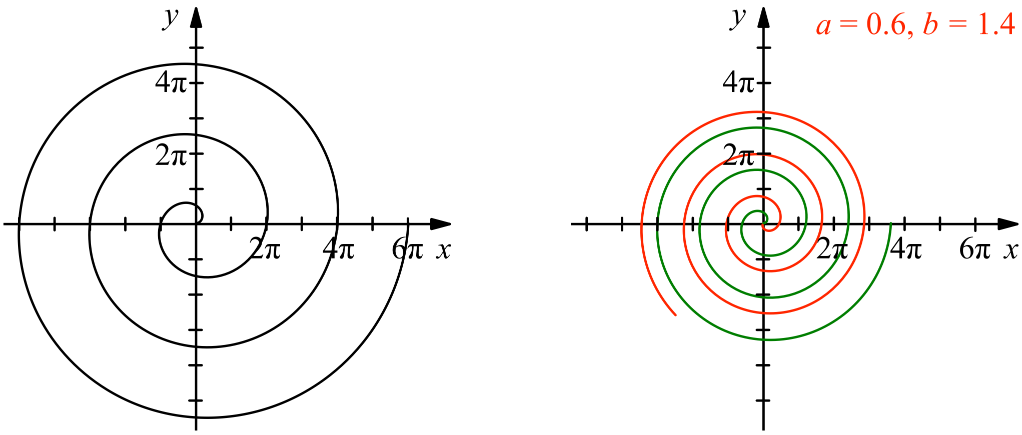
geschrieben werden.

4 Transformation der Spirale

Die durch (2) gegebene Spirale (Abb. 1b) dann durch eine Drehstreckung in die Standardspirale überführt werden. Dabei ist:

$$\begin{aligned} \text{Drehwinkel } &= \tfrac{b}{a} \\ \text{Streckfaktor } &= \tfrac{1}{a} \end{aligned} \tag{5}$$

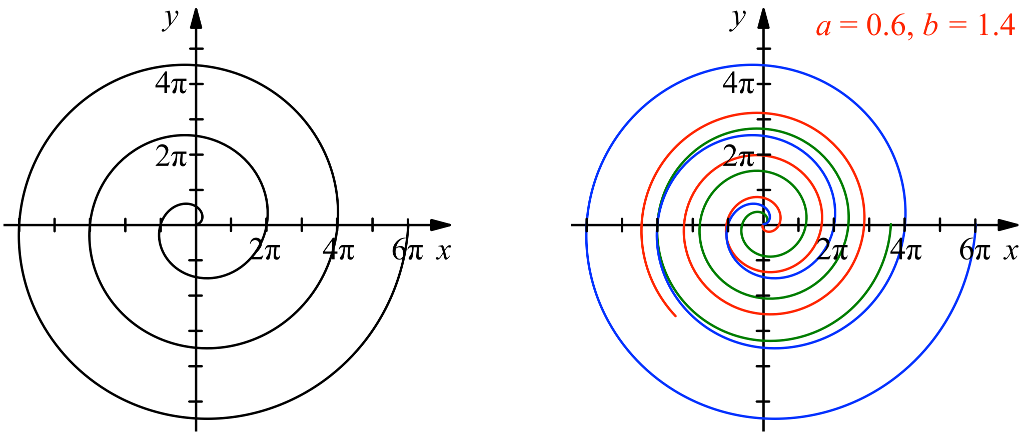
In der Abbildung 2b ist die Drehung gemäß (5) durchgeführt (grüne Spirale). Wir sehen, dass Anfang und Ende im Vergleich mit der Standardspirale passend auf der x-Achse liegen. Die Größe stimmt noch nicht.



a) b)

Abb. 2: Drehung

In der Abbildung 3b ist nun auch die Streckung gemäß (5) vollzogen worden (blaue Spirale). Wir haben die Standardspirale erreicht.



a) b)

Abb. 3: Streckung

5 Ähnlichkeit

Somit kann jede archimedische Spirale mit einer Drehstreckung auf die archimedische Standardspirale (mit gleicher Windungszahl) abgebildet werden. Daraus folgt aber, dass zwei beliebige archimedische Spiralen (mit gleicher Windungszahl) ähnlich sind.

Es gibt also im Wesentlichen nur eine archimedische Spirale.

Bemerkung: Bei den logarithmischen Spiralen ist die Situation völlig anders. Da eine logarithmische Spirale einen vom Zentrum ausgehenden Strahl unter konstantem Winkel schneidet, gibt es zu jedem Schnittwinkel eine andere logarithmische Spirale. Zwei verschiedene logarithmische Spiralen sind nicht ähnlich. Hingegen ist eine logarithmische Spirale zu sich selbst ähnlich. Sie kann durch geeignete Drehstreckungen mit sich selber zur Deckung gebracht werden (dabei wir die Spirale unendlich lang gedacht). Diese Selbstähnlichkeit wiederum ist bei den archimedischen Spiralen nicht vorhanden.

Weblinks

Hans Walser: Lotschnittpunkt
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lotschnittpunkt2/Lotschnittpunkt2.htm

Hans Walser: Lotschnittpunkt
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lotschnittpunkt/Lotschnittpunkt.htm

Hans Walser: Archimedische Spirale
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Arch_Spirale/Arch_Spirale.htm