Hans Walser, [20220704]

arctan

1 Worum geht es?

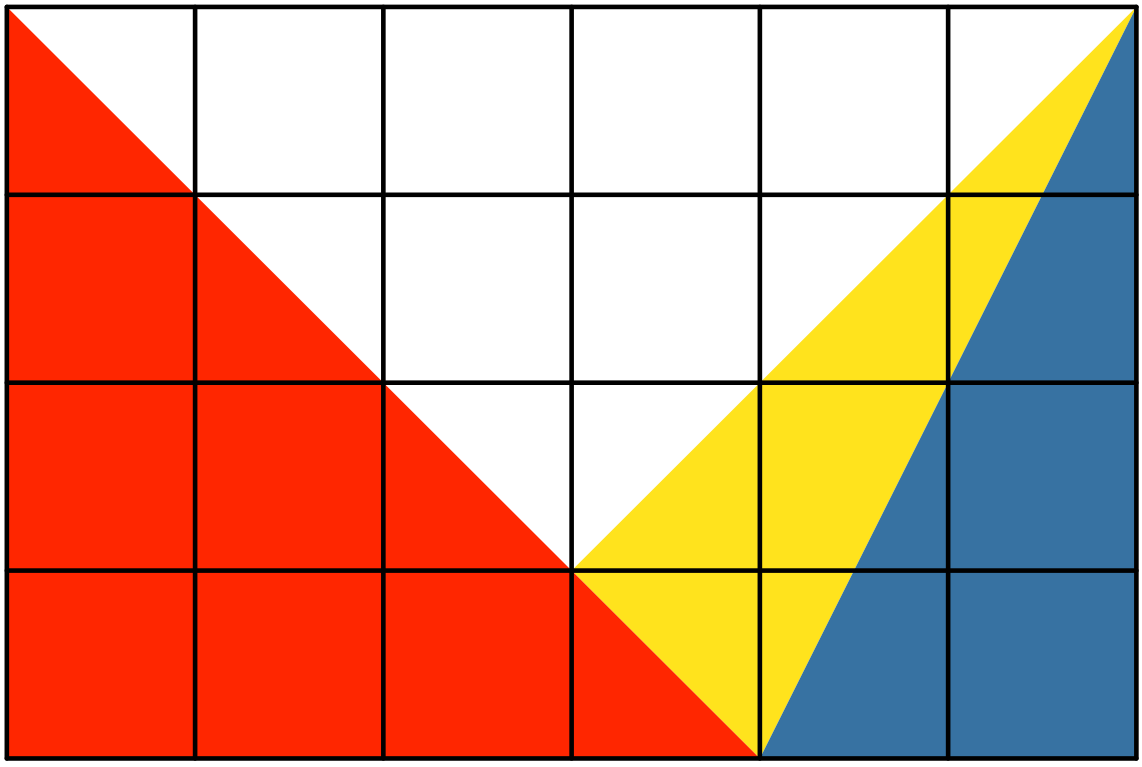
Eine Serie von Beweisen ohne Worte.

2 Beispiele

Es wird jeweils die Formel angeschrieben und anschließend der Beweis ohne Worte.

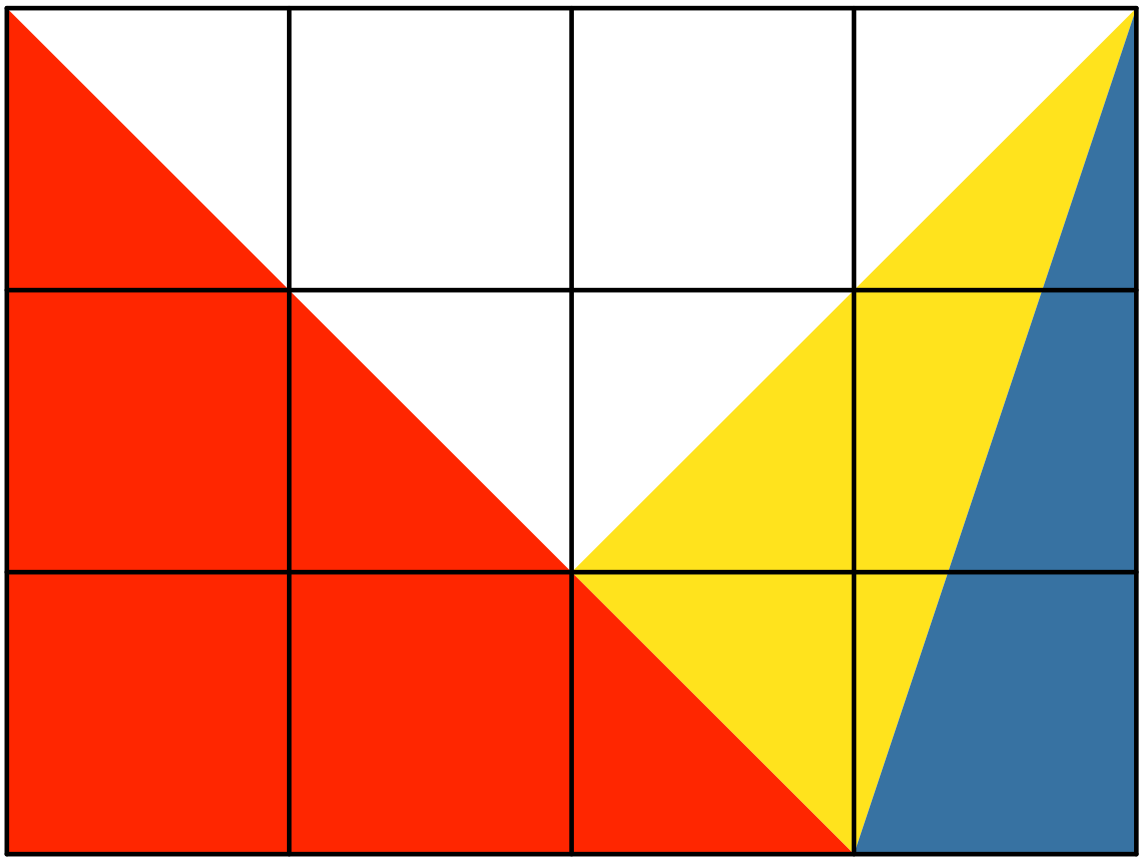
2.2

$$\arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)=180°$$



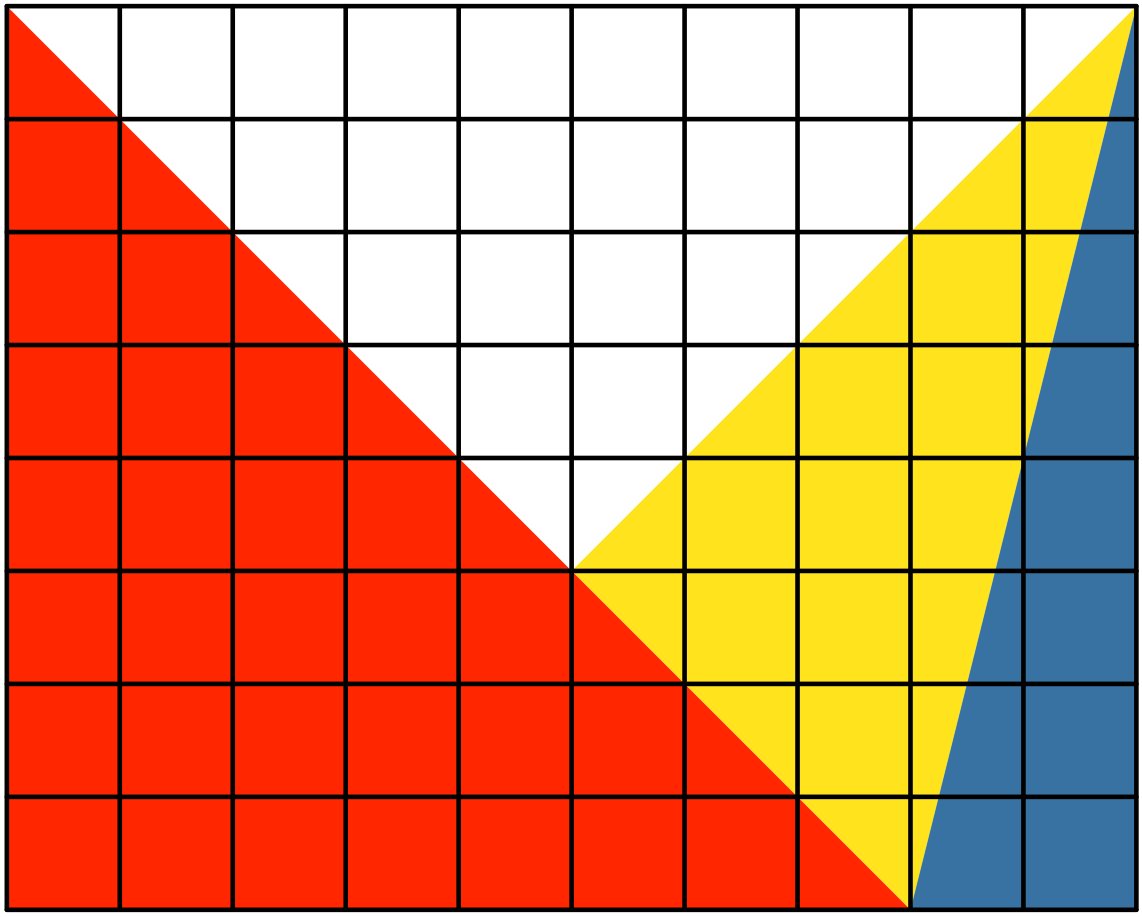
2.3

$$\arctan(1)+\arctan(3)+\arctan(2)=180°$$



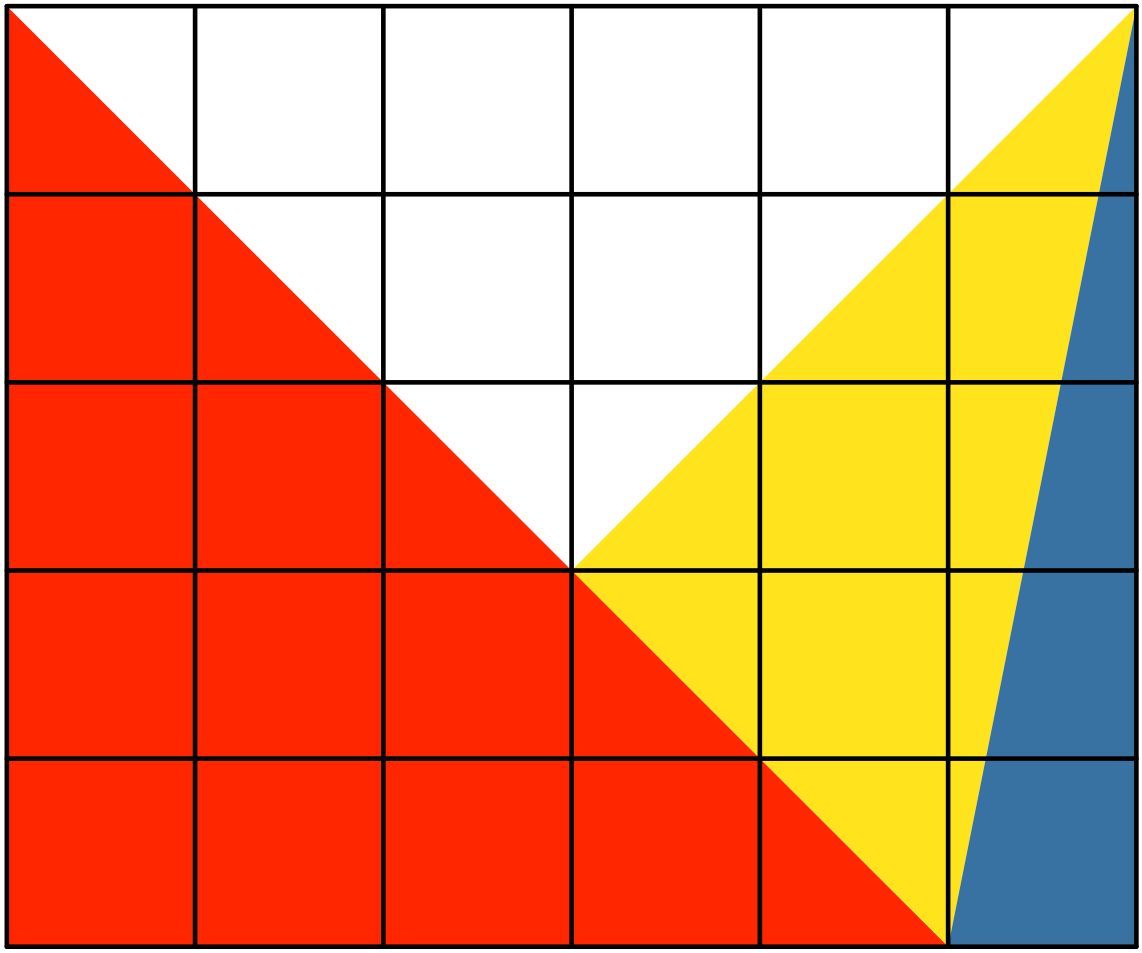
2.4

$$\arctan(1)+\arctan(4)+\arctan\left(\tfrac{5}{3}\right)=180°$$



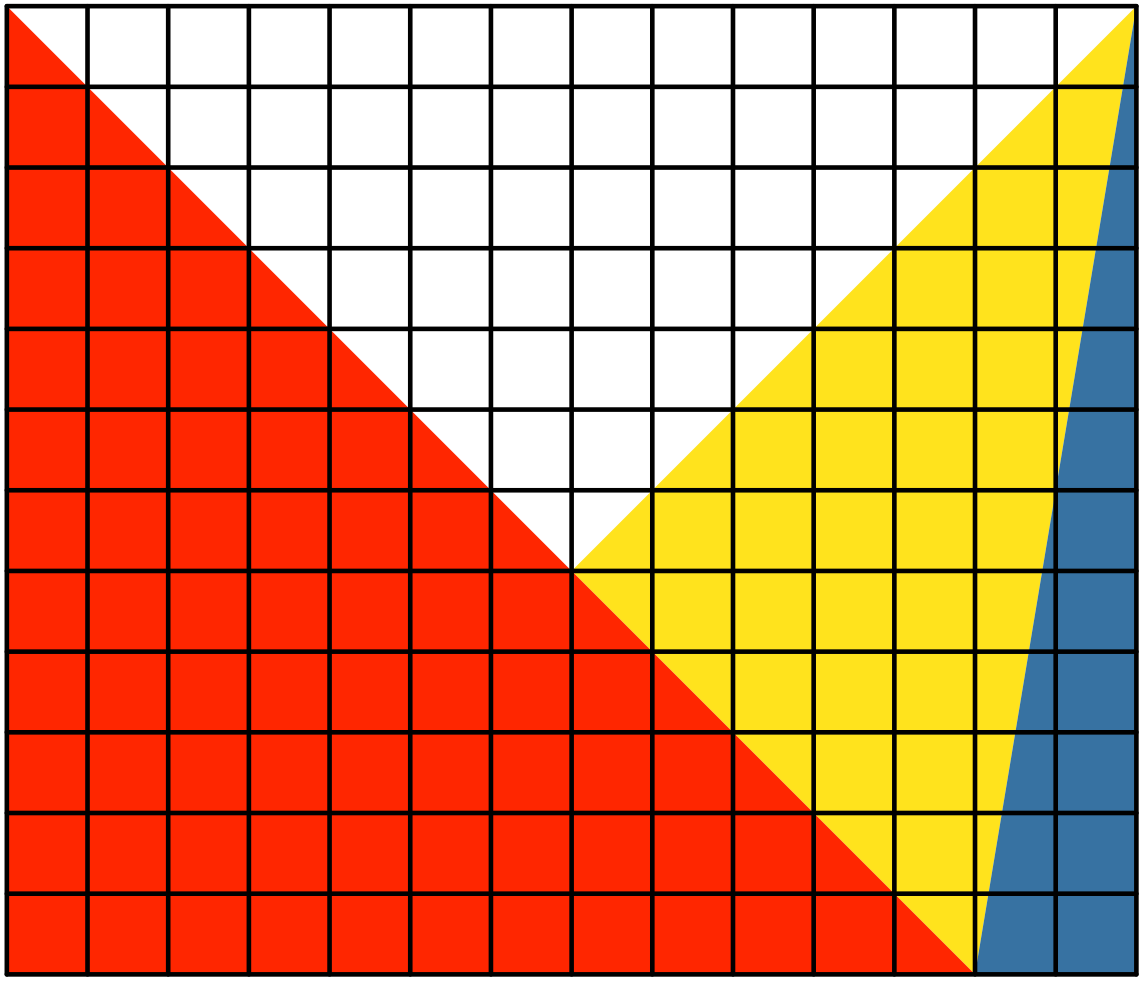
2.5

$$\arctan(1)+\arctan(5)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)=180°$$



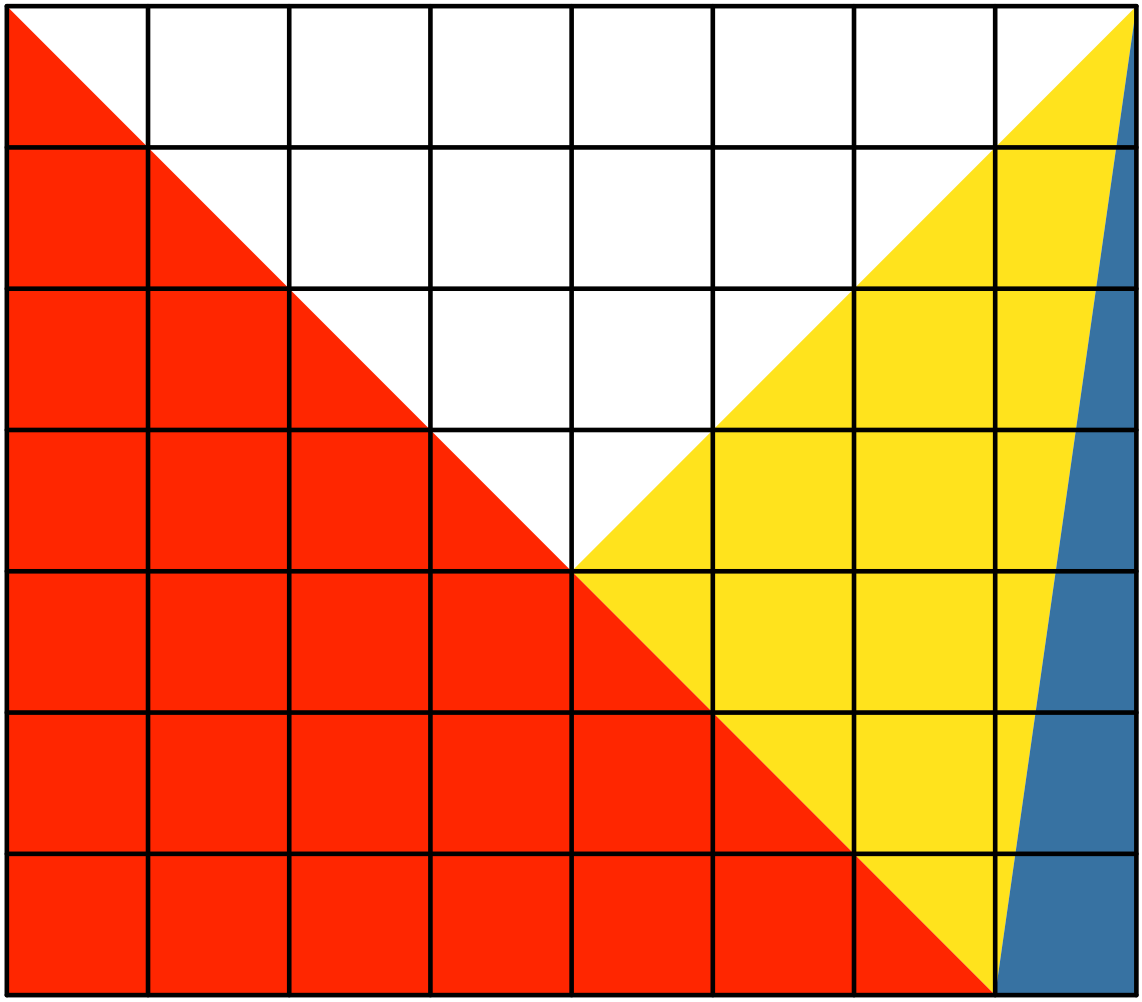
2.6

$$\arctan(1)+\arctan(6)+\arctan\left(\frac{7}{5}\right)=180°$$



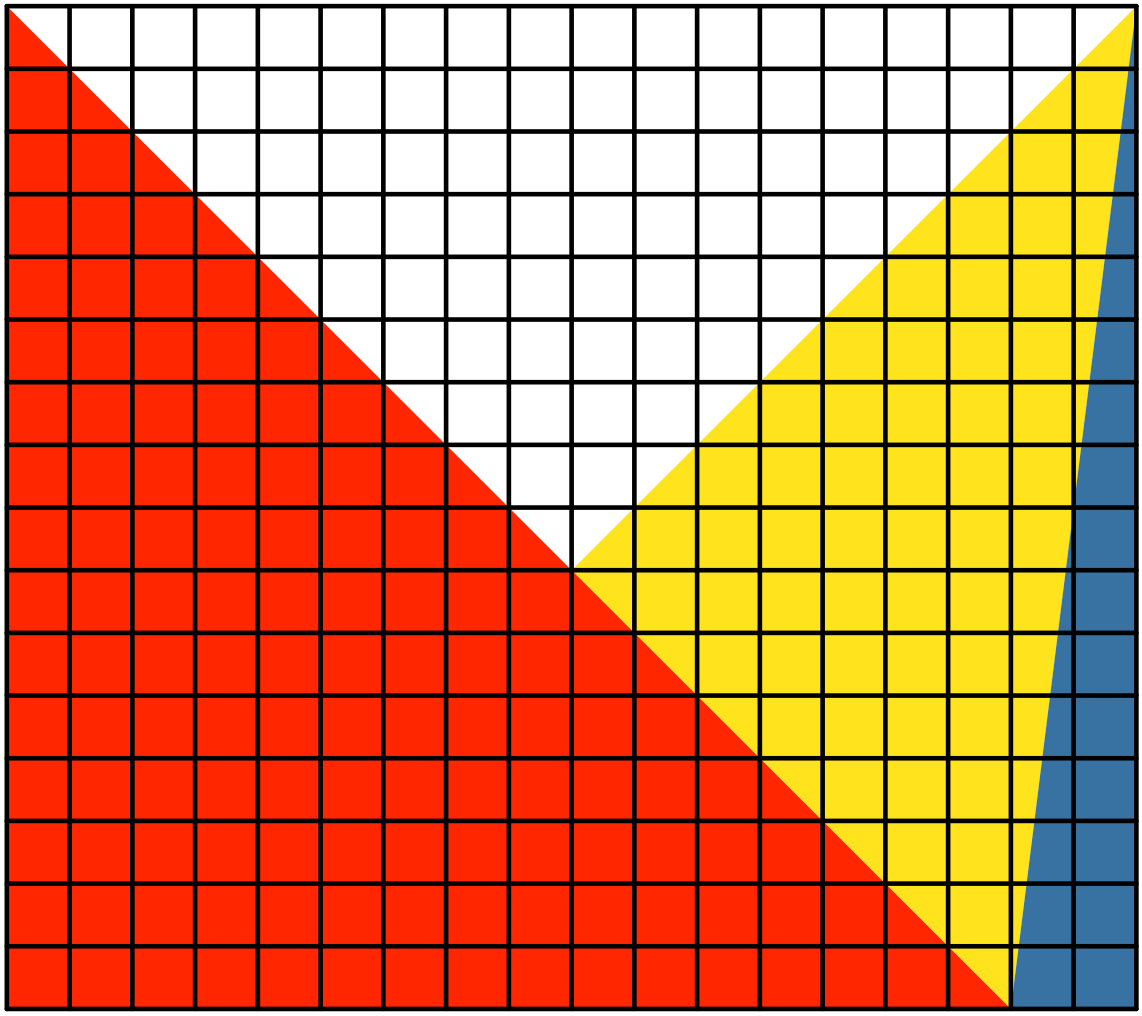
2.7

$$\arctan(1)+\arctan(7)+\arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)=180°$$



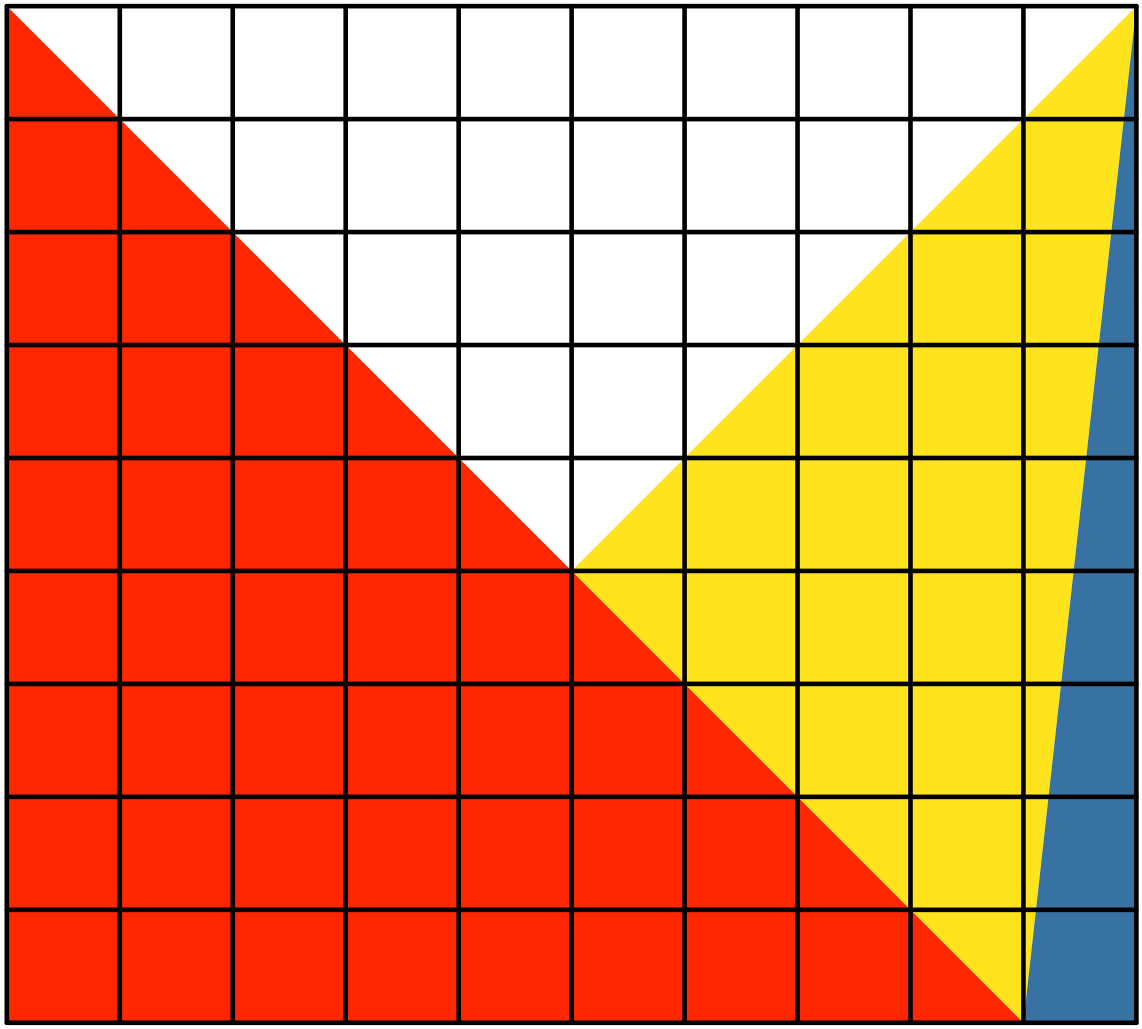
2.8

$$\arctan(1)+\arctan(8)+\arctan\left(\frac{9}{7}\right)=180°$$



2.9

$$\arctan(1)+\arctan(9)+\arctan\left(\tfrac{5}{4}\right)=180°$$



3 Allgemein

Allgemein gilt:

$$\arctan(1)+\arctan(n)+\arctan\left(\tfrac{n+1}{n-1}\right)=180°$$

4 Beweis

Der Beweis erfolgt rechnerisch mit den Additionstheoremen des Tangens. Zunächst ist:

$$\arctan(n) = 90° - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 90° - \arctan\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

Eingesetzt in die zu beweisende Formel ergibt:

$$\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \arctan\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

Auf Grund des Additionstheorems für den Tangens ist:

$$\tan\left(\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n+1}$$

Daraus folgt die zu beweisende Formel.

Wie aus dem Beweis ersichtlich ist, kann n durch eine beliebige reelle Zahl größer als 1 ersetzt werden.

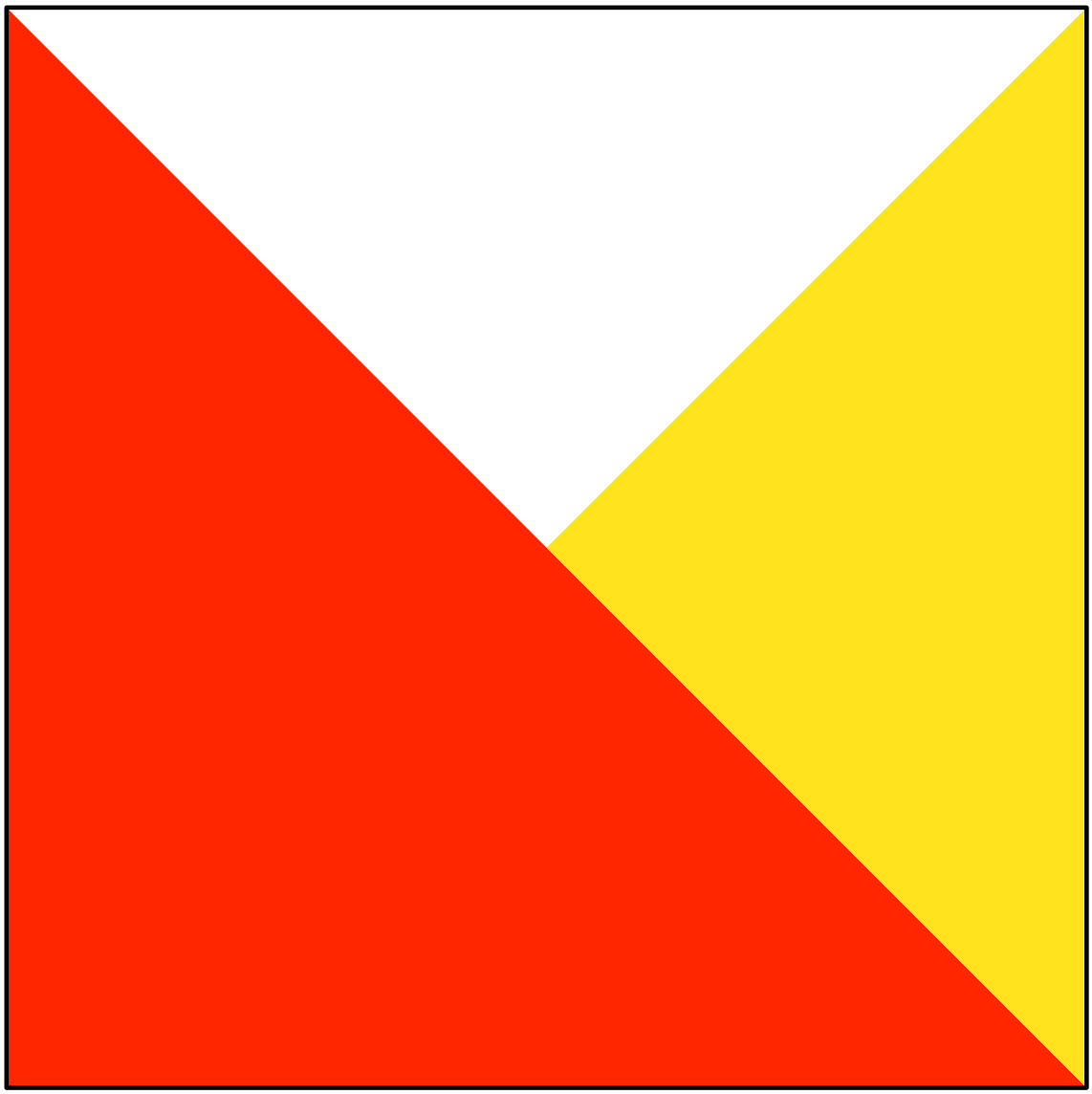
5 Bemerkungen

5.1 Paritätsproblem

Wir sehen sowohl bei den Formeln wie bei den Figuren ein unterschiedliches Verhalten bezüglich der Parität von n. Bei ungeradem n ist das Rechteck n Einheiten hoch, bei geradem n aber $2n$ Einheiten.

5.2 Grenzfigur

Für wachsendes n verschwindet das blaue Dreieck und wir erhalten die nachfolgende Grenzfigur.



Grenzfigur

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

erhalten wir die zugehörige Formel:

$$\arctan(1)+\arctan(\infty)+\arctan(1)=180°$$

$$45°+90°+45°=180°$$

Literatur

Alsina, Claudi & Nelsen, Roger B. (2013): Bezaubernde Beweise: eine Reise durch die Eleganz der Mathematik. Berlin: Springer Spektrum.

Nelsen, Roger B. (2000): Proofs without Words. MAA, The Mathematical Association of America. ISBN 978-0883857007

Weblink

Hans Walser: Tetraeder in Halbkugel

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/T/Tetraeder_in_Halbkugel/Tetraeder_in_Halbkugel.html