Hans Walser, [20150324]

Brennpunkt und Leitlinie der Parabel

1 Worum geht es?

Eine Parabel sei durch fünf Punkte $P_1, \ldots, P_5$ gegeben (Abb. 1).

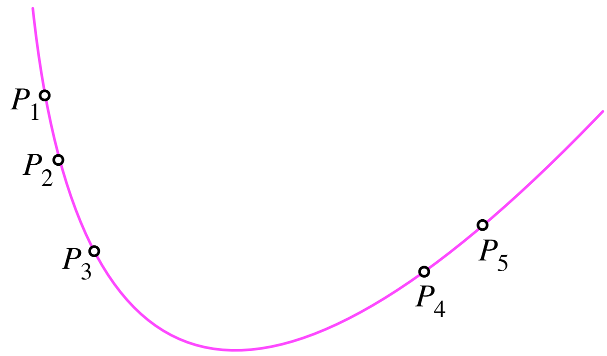

Abb. 1: Parabel durch fünf Punkte

Gesucht sind der Brennpunkt und die Leitlinie der Parabel. Gibt es ein Verfahren ohne Rechnen?

Bemerkung 1: Durch fünf Punkte kann auch eine Ellipse oder eine Hyperbel gegeben sein. Der Fall der Parabel ist ein Übergangsfall und daher sehr unwahrscheinlich.

Für den Fall der Ellipse siehe [Ellipse].

Wie es bei Hyperbeln geht, weiß ich nicht.

Bemerkung 2: In den Abbildungen ist jeweils die Parabel magenta eingezeichnet. Dies hat aber rein dekorative Bedeutung. Die Parabel wird für die Konstruktionen *nicht* verwendet.

Bemerkung 3: Im Folgenden wird das Konstruktionsverfahren beschrieben. Die Beweise überlassen wir dem der Lust hat.

2 Pappos-Pascal

Gemäß dem Satz von Pappos-Pascal kann zu den fünf gegebenen Punkten auf beliebig viele Arten ein sechster Parabelpunkt konstruiert werden. Insbesondere kann dieser sechste Punkt auf einer frei wählbaren Geraden durch einen der fünf gegebenen Punkte konstruiert werden. Wir können also zu jedem der gegebenen fünf Punkt eine Sehne in beliebiger Richtung zeichnen.

3 Achse zu schiefer Symmetrie

Parallel zur Sehne P_3P_4 zeichnen wir eine Sehne durch P_5 (Abb. 2). Die Gerade durch die Mittelpunkte der beiden Sehnen ist Symmetrieachse der Parabel bei der Schrägspiegelung in Richtung der beiden Sehnen.

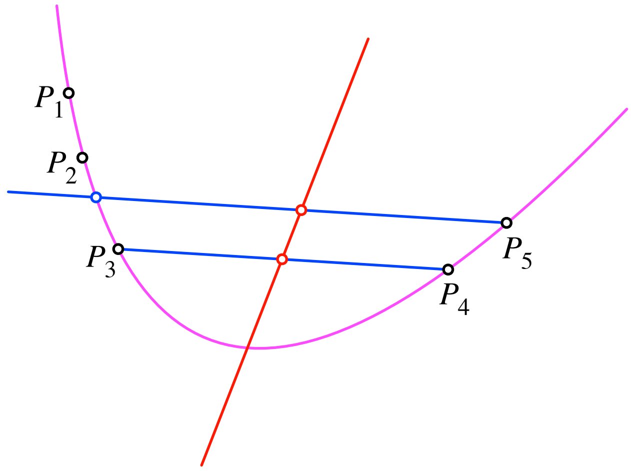

Abb. 2: Achse zu schiefer Symmetrie

Diese Achse ist parallel zur üblichen Symmetrieachse (Orthogonalspiegelung) der Parabel.

4 Symmetrieachse der Parabel

Wir zeichnen nun durch P_5 eine zur Schrägspiegelsymmetrieachse orthogonale Sehne. Die Mittelsenkrechte dieser Sehne ist die übliche Symmetrieachse der Parabel (Abb. 3). Man beachte, dass wir damit zwar die Symmetrieachse haben, aber noch *nicht* den Scheitelpunkt der Parabel.

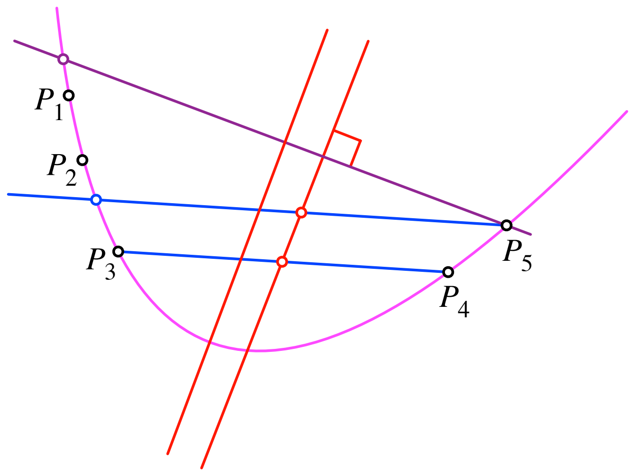

Abb. 3: Symmetrieachse der Parabel

5 Die Einheitslänge

Wir orientieren uns gedanklich an der durch $y = x^2$ gegeben schulischen Parabel. Diese hat für $x = \frac{1}{2}$ eine Tangente der Steigung 1. Diese Tangente schließt mit der Symmetrieachse einen Winkel 45° ein.

Daher zeichnen wir durch P_5 eine Sehne, welche mit der Symmetrieachse einen Winkel 45° einschließt (Abb. 4).

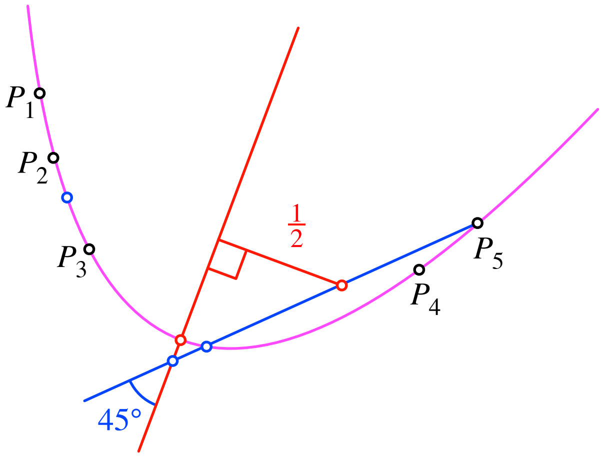

Abb. 4: Konstruktion der Einheit

Der Mittelpunkt dieser Sehne hat von der Symmetrieachse den Abstand $\frac{1}{2}$. Durch Verdoppelung erhalten wir die Einheit des passenden schrägen kartesischen Koordinatensystems.

6 Scheitelpunkt

Wir zeichnen nun ein Quadrat mit einer Ecke in P_5 und einer Seite auf der Symmetrieachse (Abb. 5).

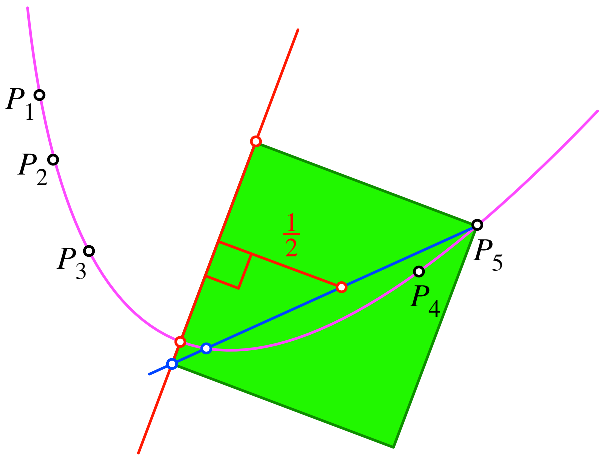

Abb. 5: Quadrat

Dieses Quadrat verwandeln wir nun in ein flächengleiches Rechteck mit der Einheit als einer Seite. Die dazu senkrechte Seite soll auf der Symmetrieachse liegen. Die Oberkante des Rechteckes soll durch P_5 verlaufen (Abb. 6). Die untere Rechteckecke auf der Symmetrieachse ist der Scheitelpunkt der Parabel.

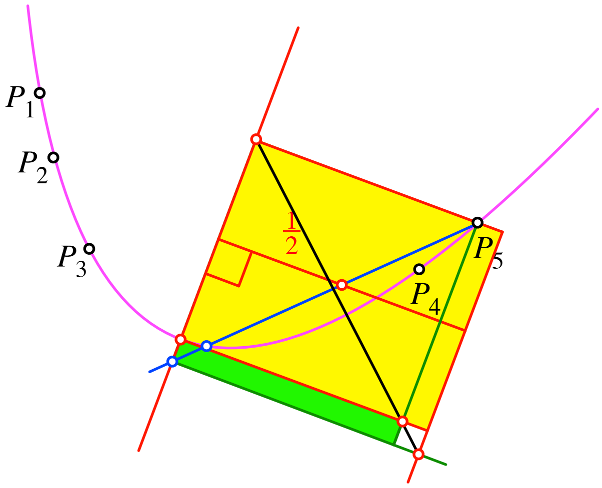

Abb. 6: Rechteck und Scheitelpunkt

7 Brennpunkt und Leitlinie

Der Brennpunkt der Parabel liegt nun auf der Symmetrieachse im Abstand $\frac{1}{4}$ oberhalb des Scheitelpunktes (Abb. 7). Die Leitlinie ist orthogonal zur Symmetrieachse und schneidet diese im Abstand $\frac{1}{4}$ unterhalb des Scheitelpunktes.

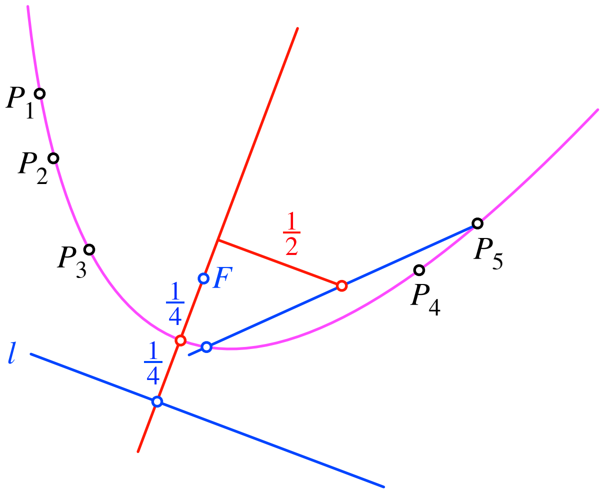

Abb. 7: Brennpunkt und Leitlinie

Websites

[Ellipse]. Abgerufen 4. 4. 2015

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/B/Brennpunkte_Ellipse/Brennpunkte_Ellipse.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/B/Brennpunkte_Ellipse/Brennpunkte_Ellipse.pdf