Hans Walser, [20150318]

Brennpunkte der Ellipse

1 Worum geht es?

Eine Ellipse sei durch fünf Punkte $P_1,\ldots,P_5$ gegeben (Abb. 1).

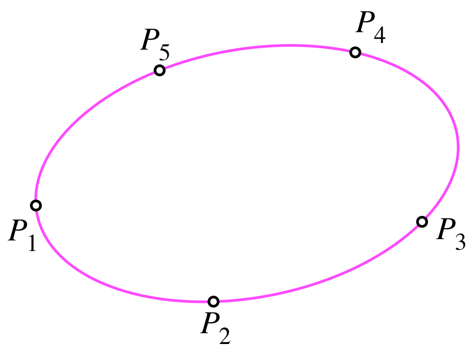

Abb. 1: Eine Ellipse durch fünf Punkte

Gesucht sind die Brennpunkte der Ellipse. Gibt es ein Verfahren ohne Rechnen?

Bemerkung 1: durch fünf Punkte kann auch eine Hyperbel oder eine Parabel gegeben sein. Wir konzentrieren uns zunächst auf den Fall der Ellipse. Wie es bei Hyperbeln oder Parabeln geht, weiß ich nicht.

Bemerkung 2: In den Abbildungen ist jeweils die Ellipse magenta eingezeichnet. Dies hat aber rein dekorative Bedeutung. Die Ellipse wird für die Konstruktionen *nicht* verwendet.

Bemerkung 3: Im Folgenden wird das Konstruktionsverfahren beschrieben. Die Beweise überlassen wir dem der Lust hat.

2 Pappos-Pascal

Gemäß dem Satz von Pappos-Pascal kann zu den fünf gegebenen Punkten auf beliebig viele Arten ein sechster Ellipsenpunkt konstruiert werden. Das geht so (Abb. 2).

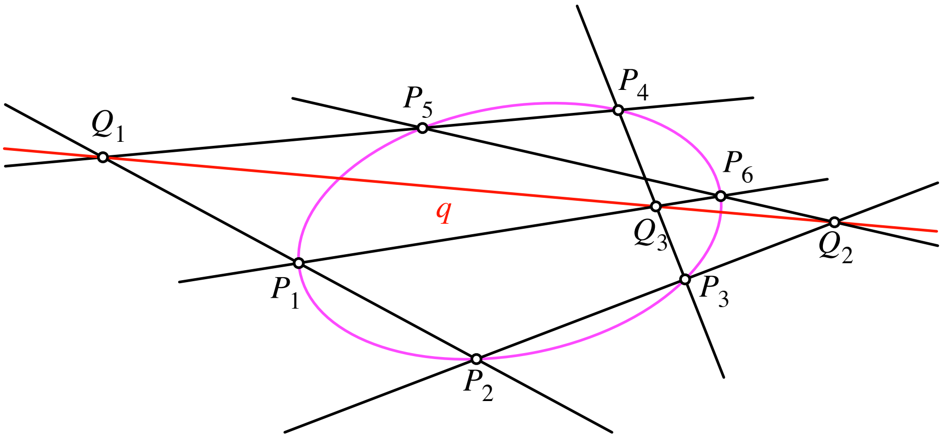

Abb. 2: Sechster Punkt

Q_1 sei der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und P_4P_5. Durch Q_1 legen wir eine beliebige Gerade q (hier haben wir einen Freiheitsgrad). Q_2 sei der Schnittpunkt von P_2P_3 mit q. Q_3 sei der Schnittpunkt von P_3P_4 mit q. Die Geraden P_5Q_2 und P_1Q_3 schneiden sich in einem Punkt P_6, und dies ist ein weiterer Ellipsenpunkt.

In unserer Konstruktion war die Gerade q beliebig durch Q_1 gewählt worden.

3 Modifikation

Die Abbildung 3 zeigt eine Modifikation.

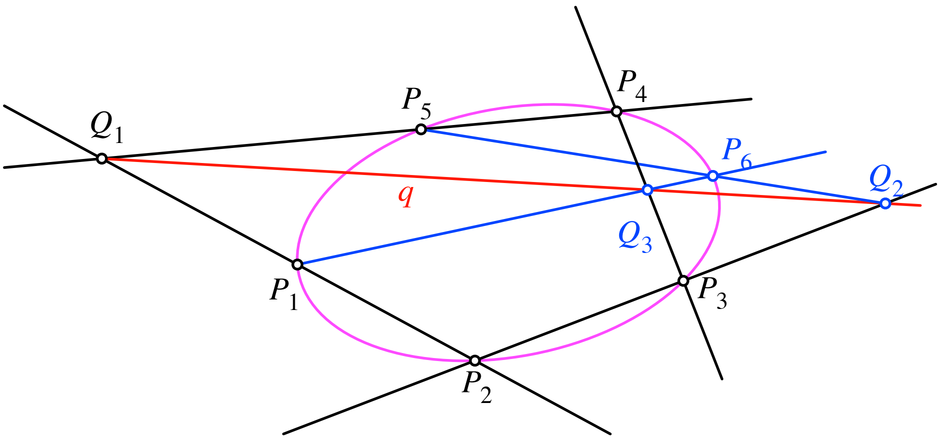

Abb. 3: Modifikation

Wir wählen durch P_1 eine beliebige Gerade (in Abb. 3 blau gezeichnet). Q_3 sei nun der Schnittpunkt dieser blauen Geraden mit P_3P_4. Weiter sei Q_2 der Schnittpunkt von P_2P_3 mit Q_1Q_3. Der Schnittpunkt P_6 von (das ist die blaue Gerade) P_1Q_3 mit P_5Q_2 ist nun der sechste Ellipsenpunkt.

Wir können also zu einem der fünf Startpunkte in beliebiger Richtung einen sechsten Ellipsenpunkt finden.

4 Eine Achse

Wir zeichnen durch P_1 und P_2 zwei parallele Geraden und darauf je einen weiteren Ellipsenpunkt P_6 beziehungsweise P_7 (Abb. 4, die Detailkonstruktionen sind nicht angegeben). M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Strecken P_1P_6 respektive P_2P_7. Die Gerade M_1M_2 ist eine Achse der Ellipse, das heißt, eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse verläuft. Hintergrund: affines Bild eines Kreises.

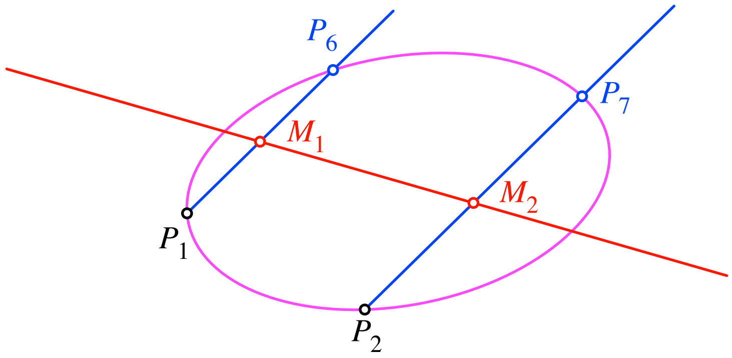

Abb. 4: Achse

5 Mittelpunkt der Ellipse

Wir konstruieren nun noch eine zweite Achse (Abb. 5). Der Schnittpunkt der beiden Achsen ist der Mittelpunkt M der Ellipse.

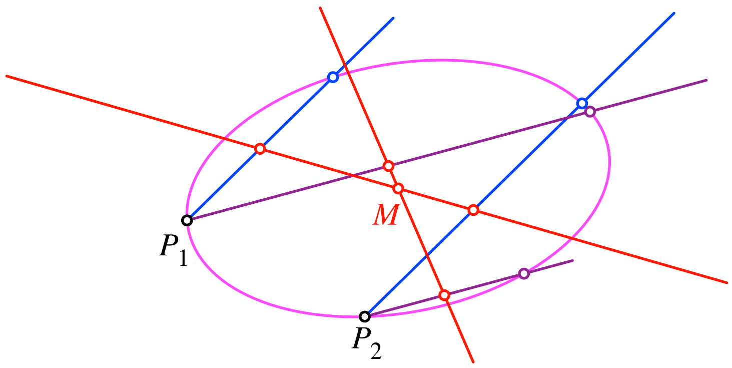

Abb. 5: Mittelpunkt

6 Konjugierte Durchmesserrichtungen

Durch den Mittelpunkt M legen wir eine Parallele zu den Richtungen, welche wir bei der Konstruktion der ersten Achse verwendet haben (Abb. 6). Diese Parallele und die erste Achse haben konjugierte Durchmesserrichtungen.

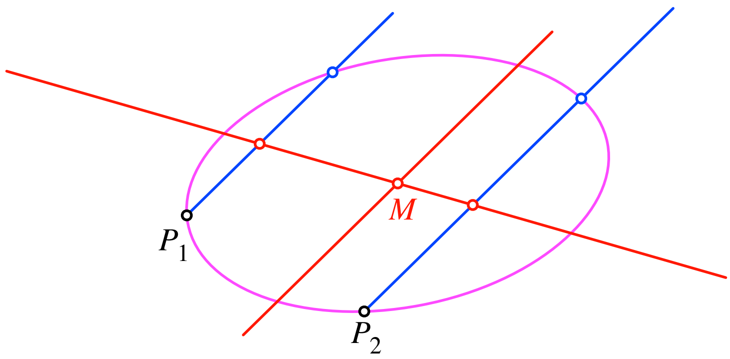

Abb. 6: Konjugierte Durchmesserrichtungen

Leider haben wir nur die Richtungen der konjugierten Durchmesser und nicht die Durchmesser selbst. Wir sind also noch nicht über dem Berg.

7 Durchmesser

Um die Endpunkte der konjugierten Durchmesser zu finden, verfahren wir wie folgt. Wir starten mit der Konfiguration mit der Achse c der Abbildung 7, welche auf der Abbildungen 4 und 6 basiert.

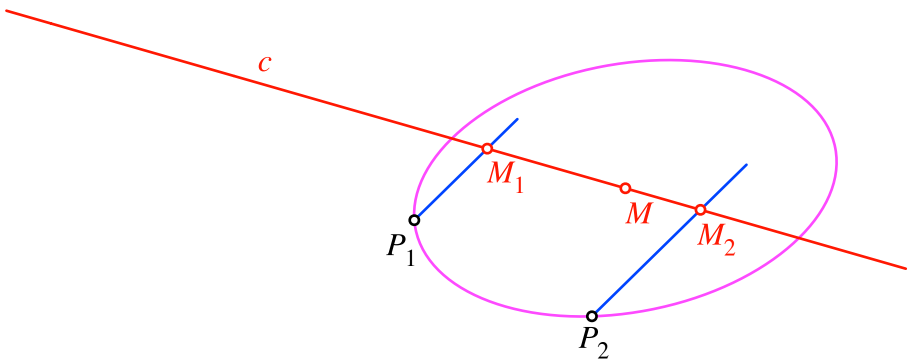

Abb. 7: Ausgangslage

Es sei Q der Schnittpunkt der Achse c mit der Geraden P_1P_2. Zur Strecke QM zeichnen wir den Thaleskreis (Abb. 8).

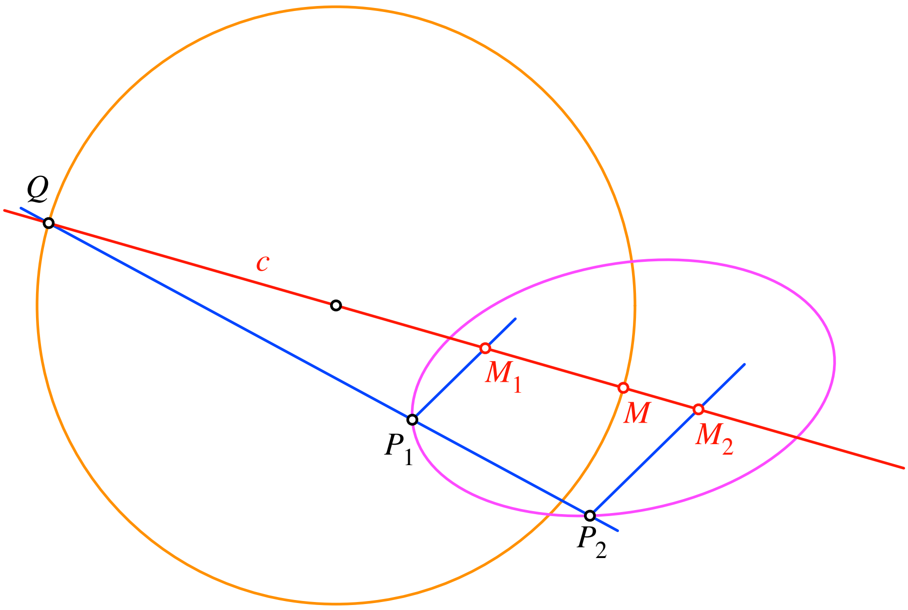

Abb. 8: Thaleskreis

Weiter sei nun N der Mittelpunkt der Strecke M_1M_2 und R der Schnittpunkt des Lotes in N auf c mit dem Thaleskreis (Abb. 9).

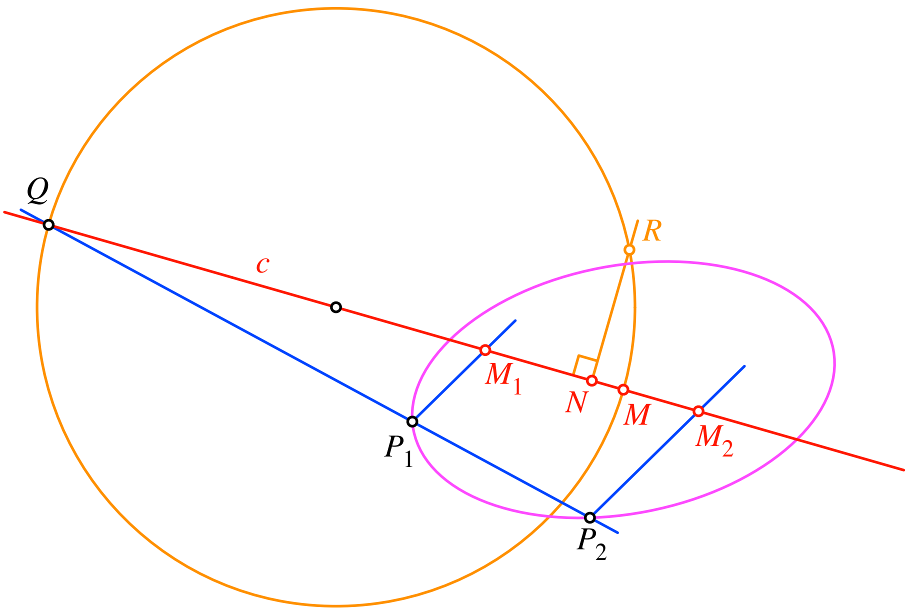

Abb. 9: Schnittpunkt mit Lot

In M_1 errichten wir ebenfalls das Lot auf c und schneiden dieses mit der Geraden QR. Das gibt den Schnittpunkt S (Abb. 10).

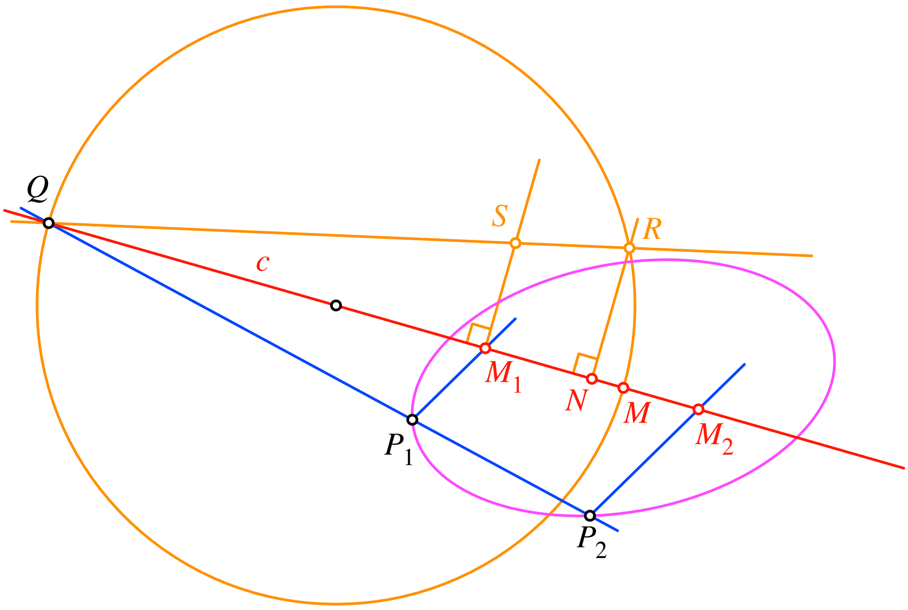

Abb. 10: Schnittpunkt

Die beiden Schnittpunkte C_1 und C_2 des Kreises um M durch S mit der Achse c sind Ellipsenpunkte und daher die Endpunkte des Ellipsendurchmessers auf der Achse c (Abb. 11).

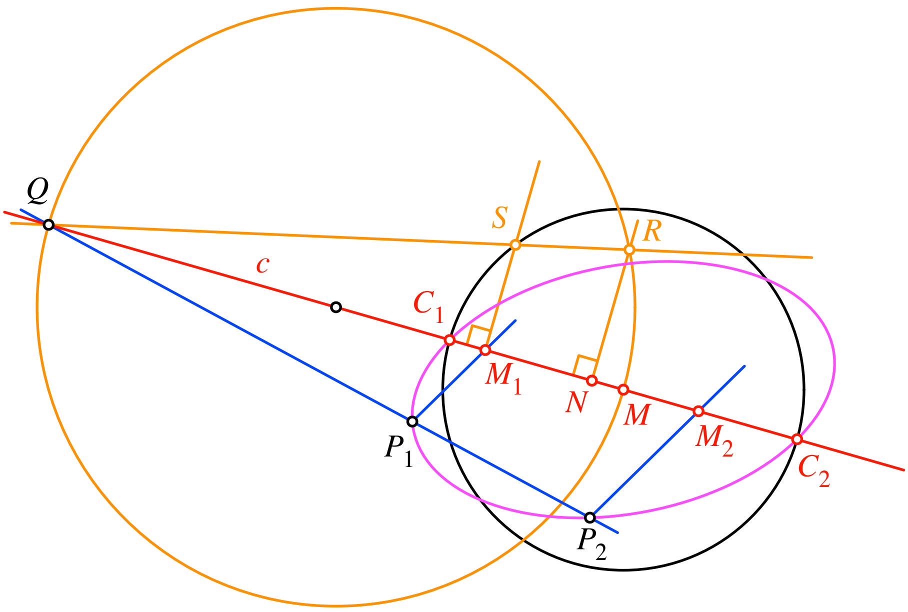

Abb. 11: Ellipsendurchmesser

8 Konjugierte Durchmesser

Wir ergänzen nun gemäß Abbildung 12.

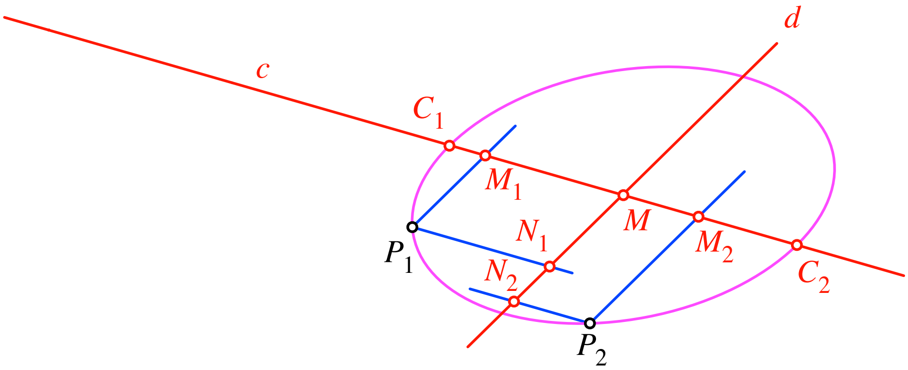

Abb. 12: Ergänzung

Damit können wir analog die Länge des konjugierten Durchmessers bestimmen (Abb.13).

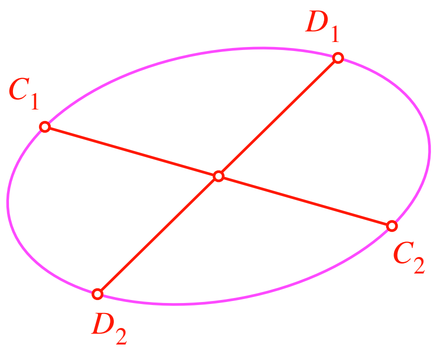

Abb. 13: Konjugierte Durchmesser

9 Halbachsen

Nun können wir mit dem Verfahren von Rytz die Halbachsen konstruieren (Abb. 14).

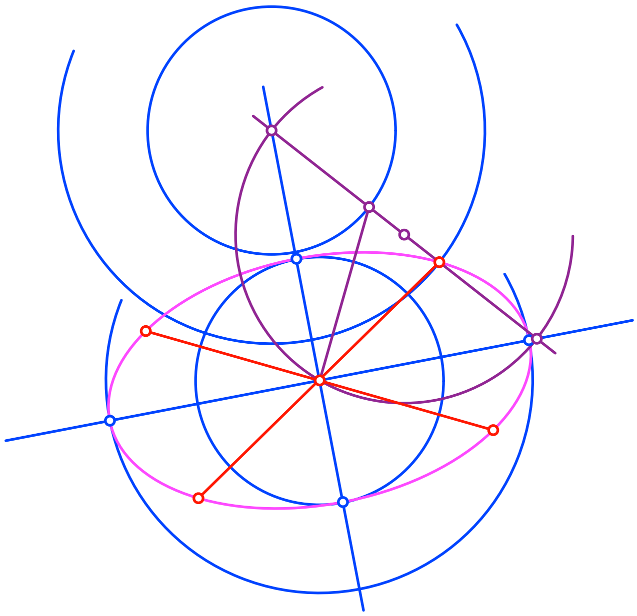

Abb. 14: Halbachsen

10 Brennpunkte

Damit finden wir schließlich die Brennpunkte F_1 und F_2 (Abb. 15).

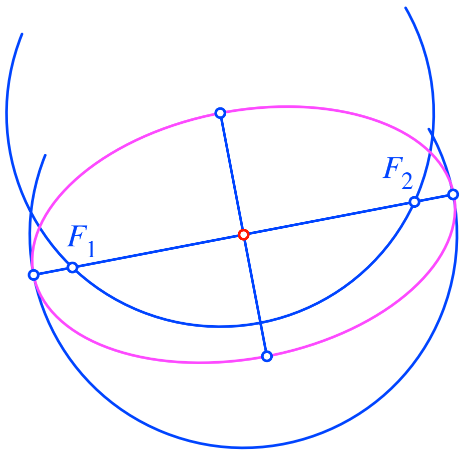

Abb. 15: Brennpunkte