Hans Walser, [20181124]

Brüche nummerieren

Anregung: J. A., B.

1 Worum geht es?

Gesucht ist eine bijektive Abbildung zwischen den ungekürzten Brüchen und den natürlichen Zahlen.

2 Vorgehen

Wir ordnen die ungekürzten Brüche in einem Quadratraster gemäß Abbildung 1a an. In einem kartesischen Koordinatensystem werden die Zähler horizontal und die Nenner vertikal abgetragen.

$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$

a)

29	38	48	59	71	84	98	113
22	30	39	49	60	72	85	99
16	23	31	40	50	61	73	86
11	17	24	32	41	51	62	74
7	12	18	25	33	42	52	63
4	8	13	19	26	34	43	53
2	5	9	14	20	27	35	44
1	3	6	10	15	21	28	36

b)

Abb. 1: Quadratraster. Wo ist die Nummer 37?

Nun nummerieren wir die Felder gemäß Abbildung 1b. Damit haben wir die bijektive Zuordnung zwischen den ungekürzten Brüchen und den natürlichen Zahlen. Jeder Bruch wird mit der Nummer im entsprechenden Feld versehen.

3 Probleme

Wie finden wir formal zu einem gegebenen Bruch seine Nummer?

Wie finden wir formal zu einer Nummer den zugehörigen Bruch?

3.1 Vom Bruch zur Nummer

Zu einem Bruch $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$ finden wir seine Nummer $n\left(p,q\right)$ mit folgender Prozedur.

$$\begin{aligned} a &= p+q \\ b &= \tfrac{1}{2}a(a-1) \\ n &= b-q+1 \end{aligned} \tag{1}$$

Hinweise zum Verständnis:

a ist konstant auf einer Schrägzeile von links oben nach rechts unten. Das sind die Schrägzeilen, auf denen die Nummerierung läuft.

b ist die unterste Nummer in der zu *a* gehörigen Schrägzeile.

Elimination von *a* und *b* führt auf:

$$n(p,q) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + 2pq + q^2 - p - 3q + 2\right) \tag{2}$$

Die Abbildung 2a zeigt die Niveaulinien von (2) für $n = 1, 2, 3, \ldots, 25$, die Abbildung 2b die Niveaulinien für $n = 10, 20, 30, \ldots, 190$.

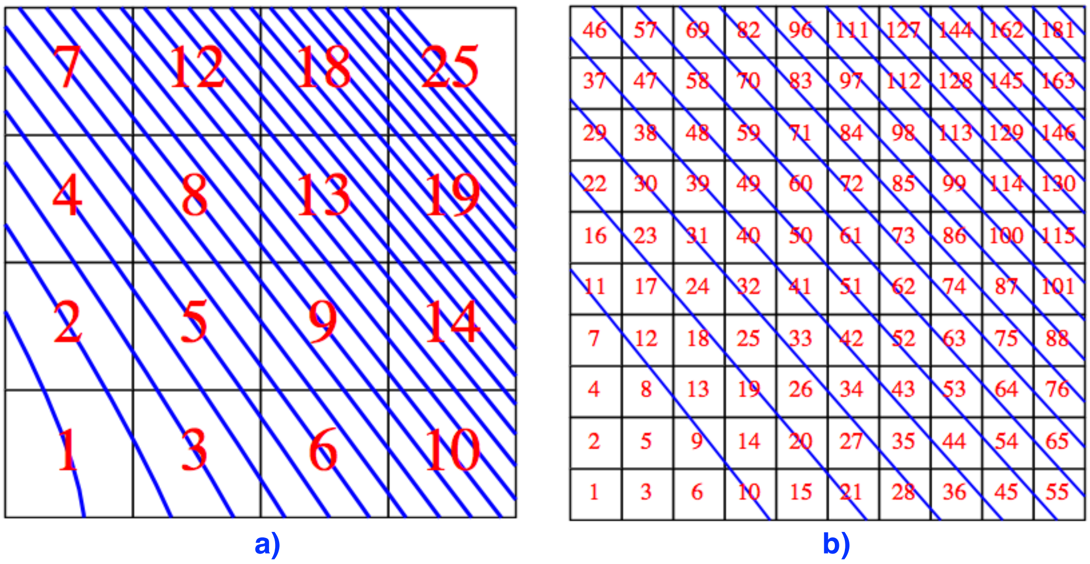


Abb. 2: Niveaulinien

Die Niveaulinien sind Kegelschnitte, da (2) quadratisch ist.

Die Abbildung 3a zeigt die zu (2) gehörende Fläche. In der speziellen Sicht (Abb. 3b) erkennen wir, dass die Fläche ein parabolischer Zylinder ist. Die Niveaulinien (Abb. 2) sind Schrägschnitte darin, also Parabeln.

Dies kann formal eingesehen werden wie folgt.

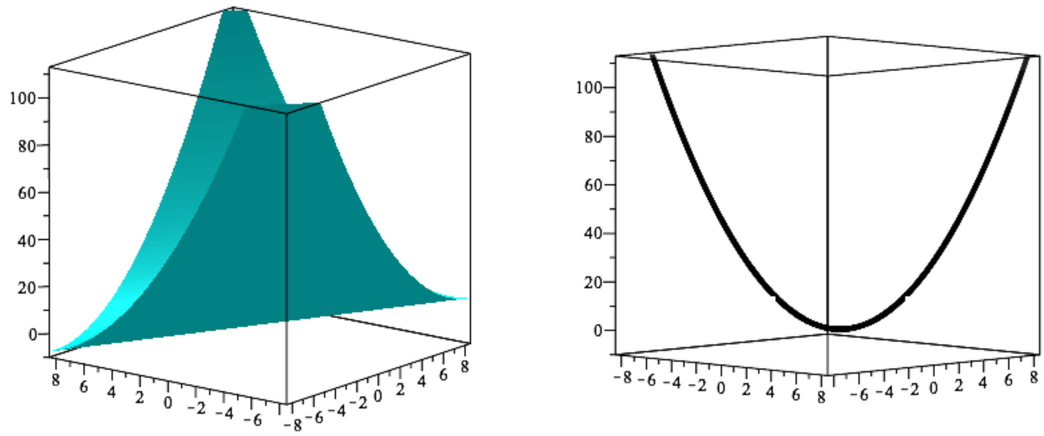
Wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= p+q \\ y &= p-q \\ z &= n \end{aligned} \tag{3}$$

Damit erhalten wir aus (2):

$$z(x,y) = \tfrac{1}{2}\left(x^2 - 2x + y + 2\right) \tag{4}$$

Für konstantes x beschreibt (4) eine Gerade (Mantellinie des Zylinders), für konstantes y eine Parabel (Leitlinie des Zylinders).



a) **b)**

Abb. 3: Fläche. Spezielle Sicht

3.2 Von der Nummer zum Bruch

Ausgehend von der Nummer n suchen wir Zähler p und Nenner q in der Form $[p, q]$. Die Prozedur ist folgende.

$$\begin{aligned} a &= \left\lceil \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+8n}\right) \right\rceil \\ b &= \tfrac{1}{2}a(a-1) \\ c &= b-n \\ p &= a-c-1 \\ q &= a-p \end{aligned} \tag{5}$$

Bei a wird auf die nächste ganze Zahl aufgerundet.

a ist wiederum konstant auf einer Schrägzeile von links oben nach rechts unten. Das sind die Schrägzeilen, auf denen die Nummerierung läuft.

b ist die unterste Nummer in der zu a gehörigen Schrägzeile.

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte.

n	$[p,q]$	$p\,/\,q$
1	[1,1]	1 / 1
2	[1,2]	1 / 2
3	[2,1]	2 / 1
4	[1,3]	1 / 3
5	[2,2]	2 / 2
6	[3,1]	3 / 1
7	[1,4]	1 / 4
8	[2,3]	2 / 3
9	[3,2]	3 / 2
10	[4,1]	4 / 1
11	[1,5]	1 / 5
12	[2,4]	2 / 4
13	[3,3]	3 / 3
14	[4,2]	4 / 2
15	[5,1]	5 / 1

Tab. 1: Erste Werte

4 Gekürzte Brüche

Für die gekürzten Brüche, also die positiven rationalen Zahlen, ist die Sache weniger einfach.

Ich habe keine schöne Lösung. Immerhin führt die Abzählbarkeit der ungekürzten Brüche sofort zur Abzählbarkeit der gekürzten Brüche. Wir haben eine Art Majorantenkriterium.

Websites

Hans Walser: *Kürzen*

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kuerzen/Kuerzen.htm