Hans Walser, [20130101]

Bucklige Straße

Ein Kreis kann auf einem Quadrat abgerollt werden, wenigstens ein Stück weit. Kann umgekehrt ein Quadrat auf einem Kreis abgerollt werden? Die Abbildung 1 zeigt die Idee.

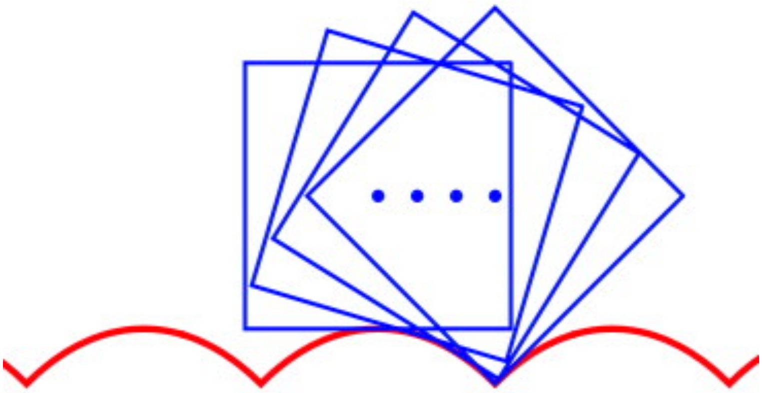

Abb. 1: Abrollen eines Kreises

Der Mittelpunkt des Quadrates bewegt sich auf einer horizontalen Geraden.

Leider sind die Bogenstücke keine Kreisbögen.

Dies kann wie folgt eingesehen werden: Zunächst muss der Winkel zweiter aufeinander folgender Bögen ein rechter sein. Bei einem spitzen Winkel hätte die Quadratecke nicht Platz. Bei einem stumpfen Winkel würde die Quadratecke im Scheitel drehen und der Mittelpunkt des Quadrates einen Kreisbogen beschreiben, im Widerspruch zur geforderten Bewegung auf einer horizontalen Geraden. Aus dieser Winkelüberlegung folgt, dass die Kreisbögen Viertelkreise sein müssen (Abb. 2).

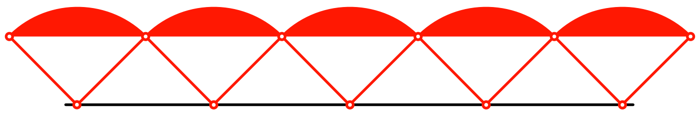

Abb. 1: Bucklige Straße aus Viertelkreisen

Für die Rechnung nehmen wir an, das Quadrat habe die Seitenlänge 2. Dann muss auch der Boden eines Viertelkreises die Länge 2 haben, woraus sich ein Radius $r = \frac{4}{\pi} \approx 1.27$ ergibt.

Nun studieren wir das Quadrat in zwei speziellen Positionen (Abb. 3), einmal horizontal und einmal um 45° gedreht.

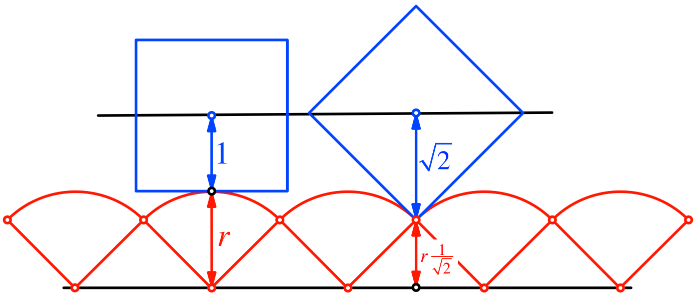

Abb. 3: Spezielle Positionen des Quadrates

Da die Gerade durch die Quadratmittelpunkte horizontal sein muss wie die Gerade durch die Zentren der Viertelkreise, erhalten wir:

$$1+r=\sqrt{2}+r\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Daraus ergibt sich für r den Wert $r=\sqrt{2}\approx 1.41$. Dies widerspricht dem vorhin gerechneten Wert $r=\frac{4}{\pi}\approx 1.27$.

Man kann es auch so sehen: aus der Gleichheit der beiden Werte für r folgt:

$$\frac{4}{\pi}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \pi=2\sqrt{2}$$

Das ist zunächst schon numerische in Widerspruch, der Wert $2\sqrt{2}$ ist eine sehr schlechte Approximation für π . Weiter kann π nicht durch $\sqrt{2}$ ausgedrückt werden, denn π ist eine transzendent irrationale Zahl, hingegen $\sqrt{2}$ nur algebraisch irrational. Könnte π durch $\sqrt{2}$ ausgedrückt werden, wäre π mit Zirkel und Lineal konstruierbar (Quadratur des Kreises).

Die Idee mit den Kreisförmigen Buckeln in der Straße ist also falsch. Hingegen kann mit einigem Rechenaufwand gezeigt werden, dass es mit Bögen aus dem Funktionsgrafen der hyperbolischen Kosinus-Funktion (so genannte Kettenlinien) klappt [1].

Link

[1] www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadratisches_Rad/Square_Wheel.htm
(abgerufen 1. 1. 2013)