

Hans Walser, [20170413]

Das DIN-Format im Dom zu Aachen

1 Worum geht es?

Im Fliesenmuster des Fußbodens im Dom zu Aachen suchen wir nach Rechtecken mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ (DIN-Rechtecke).

In den meist als Bandornament ausgearbeiteten Fliesenmustern wird sehr oft auf das regelmäßige Achteck Bezug genommen. Es erstaunt daher nicht, dass auch DIN-Rechtecke auffindbar sind.

Im Folgenden einige Beispiele. Der Nachweis des DIN-Formates erfolgt rechnerisch.

Über das DIN-Format siehe auch (Walser 2013), (Walser 2016) und [\[2\]](#).

2 Beispiele

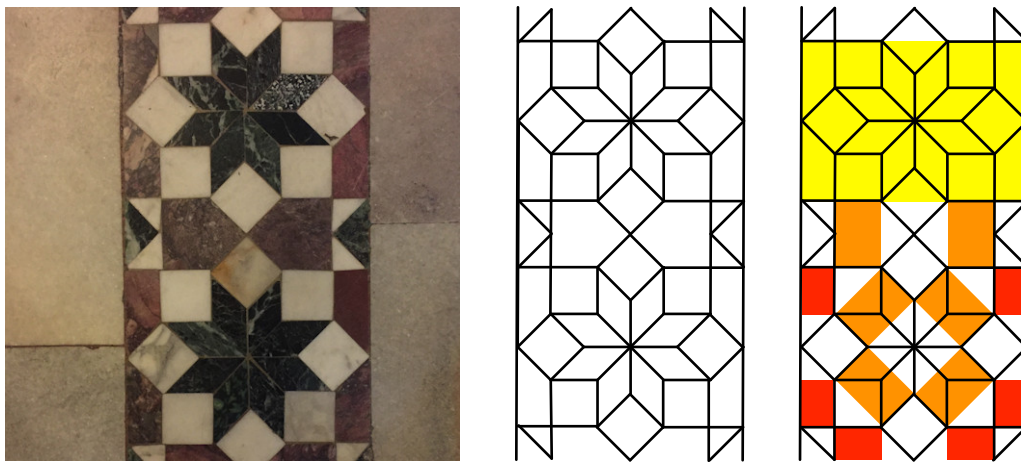


Abb. 1: Din-Rechtecke verschiedener Größen

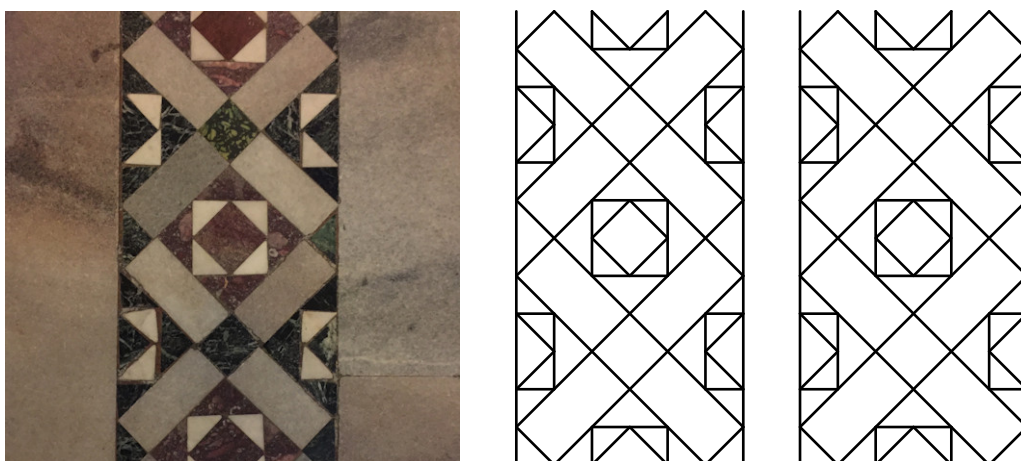


Abb. 2: Warum gibt es hier keine DIN-Rechtecke?

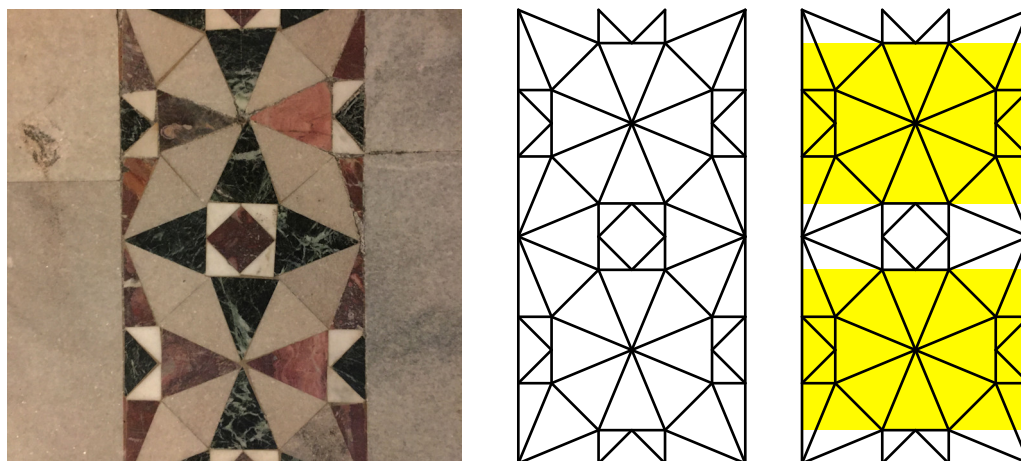


Abb. 3: Gibt es noch weitere DIN-Rechtecke?

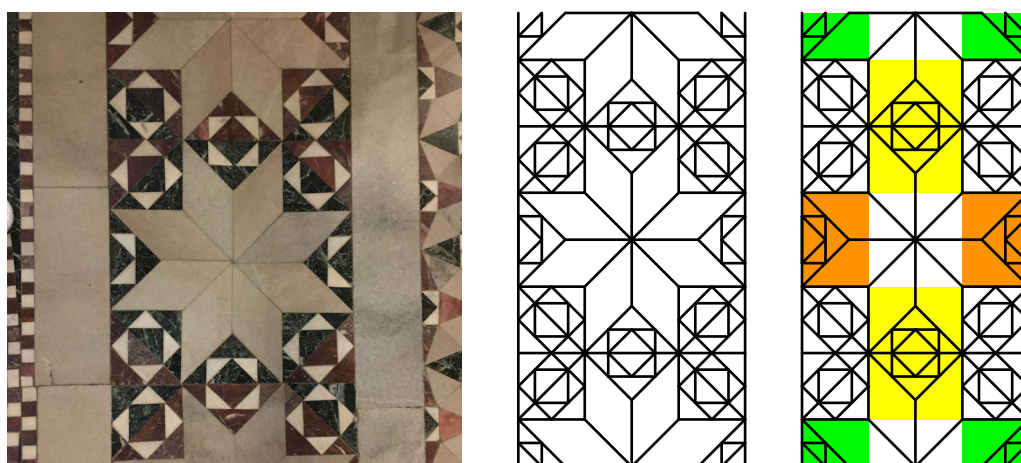


Abb. 4: Das orange Rechteck ist halb so groß wie das gelbe



Abb. 5: DIN-Rechtecke verschiedener Größen

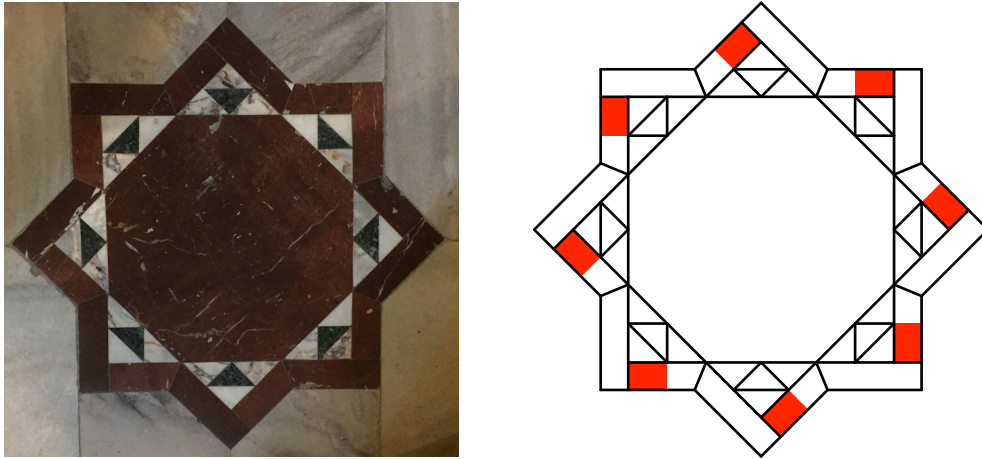


Abb. 6: Magere Ausbeute

3 Bemerkungen

3.1 Rechnerischer Nachweis

Wir berechnen exemplarisch die Seitenlängen des gelben Rechteckes der Abbildung 1. Die Abbildung 7 zeigt die verwendete Maßeinheit.

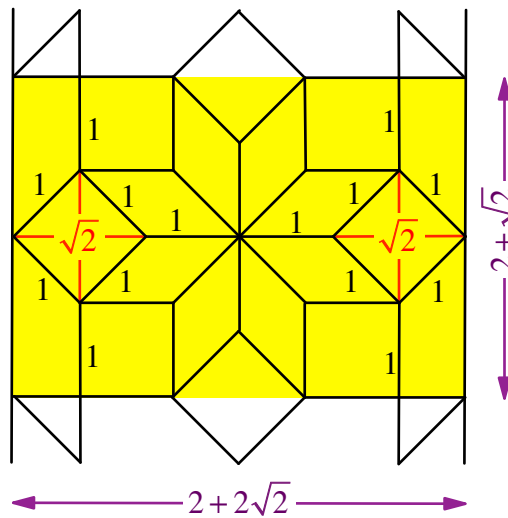


Abb. 7: Vermaßung

Wegen

$$\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} \quad (1)$$

ist:

$$(2 + 2\sqrt{2}) : (2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} : 1 \quad (2)$$

Das gelbe Rechteck ist also im DIN-Format.

Entsprechend kann bei den anderen eingezeichneten Rechtecken verfahren werden.

Bei den Beispielen der Abbildungen 3 und 5 benötigen wir den Tangens von 67.5° . Der Taschenrechner gibt:

$$\tan(67.5^\circ) \approx 2.414213562373094 \quad (3)$$

Wir vermuten:

$$\tan(67.5^\circ) = 1 + \sqrt{2} \quad (4)$$

Für den Nachweis setzen wir zunächst $\tan(67.5^\circ) = x$. Nun verwenden wir das Additionstheorem für den Tangens:

$$-1 = \tan(135^\circ) = \tan(2 \cdot 67.5^\circ) = \frac{2 \tan(67.5^\circ)}{1 - \tan^2(67.5^\circ)} = \frac{2x}{1 - x^2} \quad (5)$$

Wir erhalten die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (6)$$

Diese hat die Lösungen:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \quad (7)$$

In unserem Kontext ist die positive Lösung relevant. Damit ist (4) nachgewiesen.

3.2 Das Beispiel ohne DIN-Rechteck

Die Figur der Abbildung 2 lässt sich in ein Karoraster und dessen Diagonalen einpassen (Abb. 8). In einem Karoraster mit Diagonalen kommen zwar Längenverhältnisse $\sqrt{2} : 1$ vor, aber die zugehörigen Strecken schneiden sich unter Winkeln von 45° und können kein Rechteck bilden.

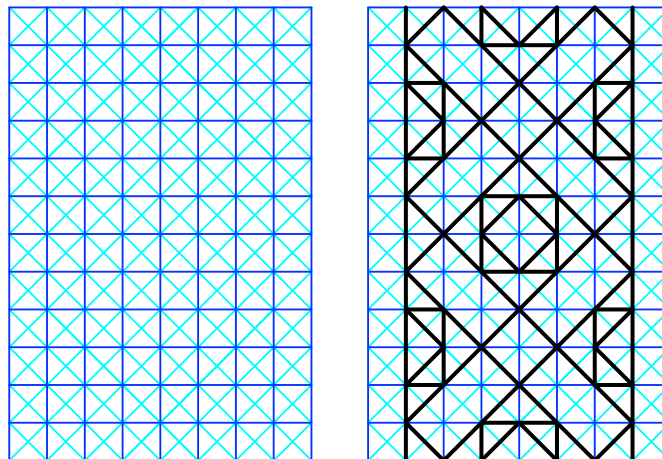


Abb. 8: Einpassen in Karoraster

3.3 Symmetrien

Zu Symmetrien siehe (Walser 2014) und [3].

3.3.1 Bandornamente

Die Figuren der Abbildungen 1 bis 5 sind Bandornamente. Sie gehören alle zur selben Symmetrieklasse. (Symmetrieklasse F_5 gemäß (Walser 2014, S. 81)).

3.3.2 Oktogonaler Stern

Der Stern der Abbildung 6 ist an den Außenecken *nicht* auf Gehrung gearbeitet (Abb. 9a).

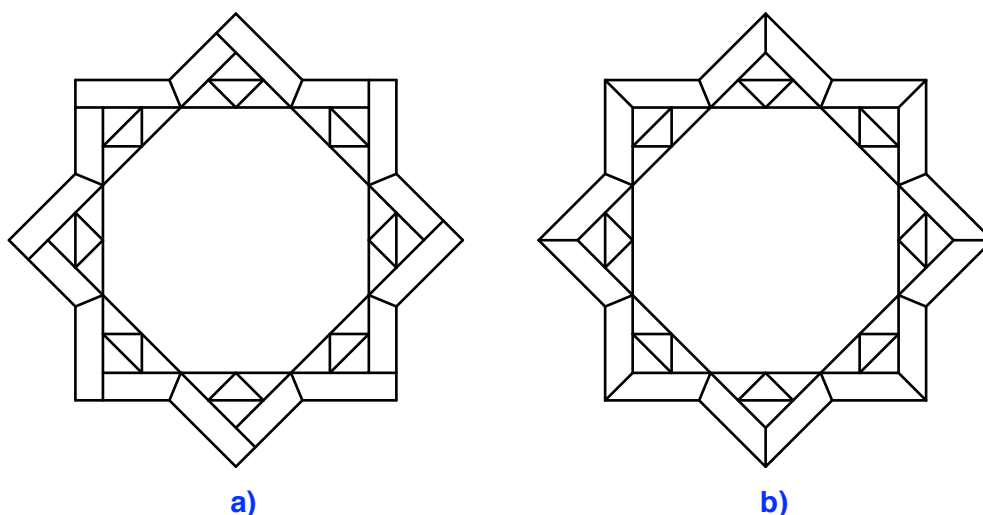


Abb. 9: Ohne und mit Gehrung

Die Figur hat daher zwar eine achteilige Drehsymmetrie, aber *keine* Spiegelachsen. Für die Herstellung werden drei verschiedene Fliesenformate benötigt (ohne das zentrale Achteck und ohne Außenflächen).

Die auf Gehrung gearbeitete Figur der Abbildung 9b hat hingegen zusätzlich zur Drehsymmetrie acht Spiegelachsen. Für die Herstellung werden nur zwei verschiedene Fliesenformate benötigt.

3.4 Historisches

Die Marmorfußböden im Oktogon des Doms und in den Umgängen wurden 1913 verlegt [1].

Die Fußbodenplatten wurden 2007-2010 umfassend saniert. Dabei wurde eine Unterkonstruktion zur statischen Sicherung eingebracht [1].

Literatur

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Walser, Hans (2014): Symmetrie in Raum und Zeit. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-46-2.

Walser, Hans (2016): Spielereien im DIN-Format. MU, Der Mathematikunterricht. Jahrgang 62. Heft 5-2016. S. 3-13.

Websites

[1] Baugeschichte Dom zu Aachen (14. 4. 2017):

https://de.wikipedia.org/wiki/Aachener_Dom_-_K.C3.B6nigreich_Preu.C3.9Fen_.281815_bis_1918.29

[2] DIN-Format (15. 4. 2017):

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen_Uebersicht/DIN_Format/index.html

[3] Symmetrie (15. 4. 2017):

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen_Uebersicht/Symmetrie/index.html