

Hans Walser, [20190428]

Dodekaeder und Ikosaeder

1 Worum geht es?

Spezielle relative Lagen der beiden Körper.

2 Dualität

In der Abbildung 1 sind ein regelmäßiges Dodekaeder (grün) und ein regelmäßiges Ikosaeder (rot) so arrangiert, dass sich die Kanten paarweise rechtwinklig schneiden und halbieren.

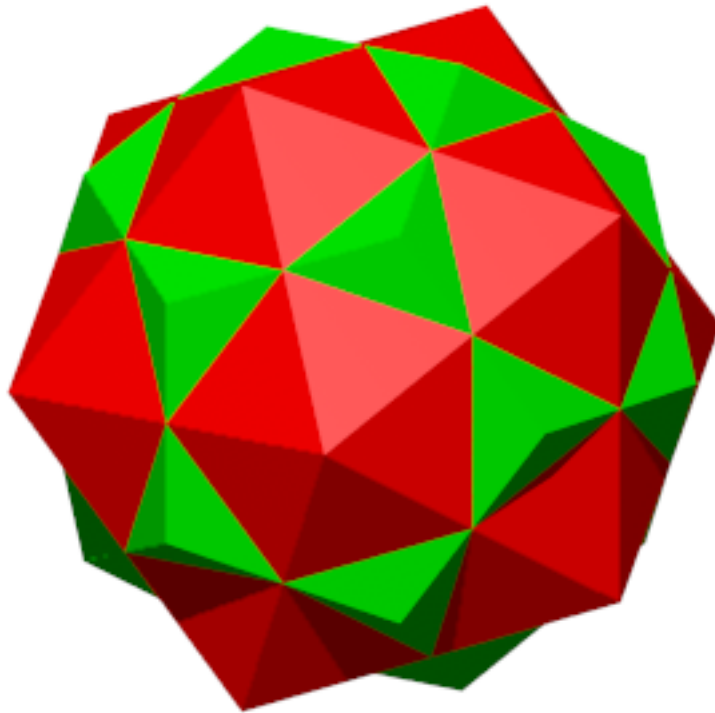


Abb. 1: Dodekaeder und Ikosaeder

Je eine Dodekaederkante und eine Ikosaederkante liegen also paarweise in derselben Ebene.

3 Problemstellung

Man zeige oder widerlege, dass es weitere Situationen gibt, in denen je eine Dodekaederkante und eine Ikosaederkante paarweise in derselben Ebene liegen.

4 Konstruktion einer Lösung

Wir drehen das Dodekaeder um die senkrechte Achse durch den Mittelpunkt um 90° (Abb. 2). Das Dodekaeder verschwindet dabei weitgehend im Innern des Ikosaeders.

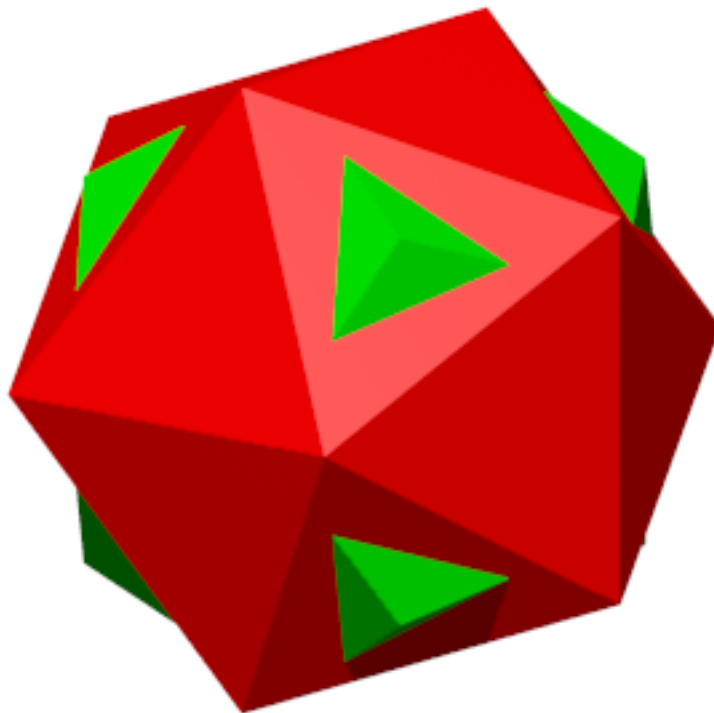


Abb. 2: Gedrehtes Dodekaeder

In der Abbildung 3 ist das Ikosaeder teilweise abgedeckt. Wir sehen, dass die Firstkante des gedrehten Dodekaeders auf der Firstkante des Ikosaeders liegt. Entsprechendes gilt auch für die extrem liegenden Kanten unten, links und rechts, sowie vorne und hinten.

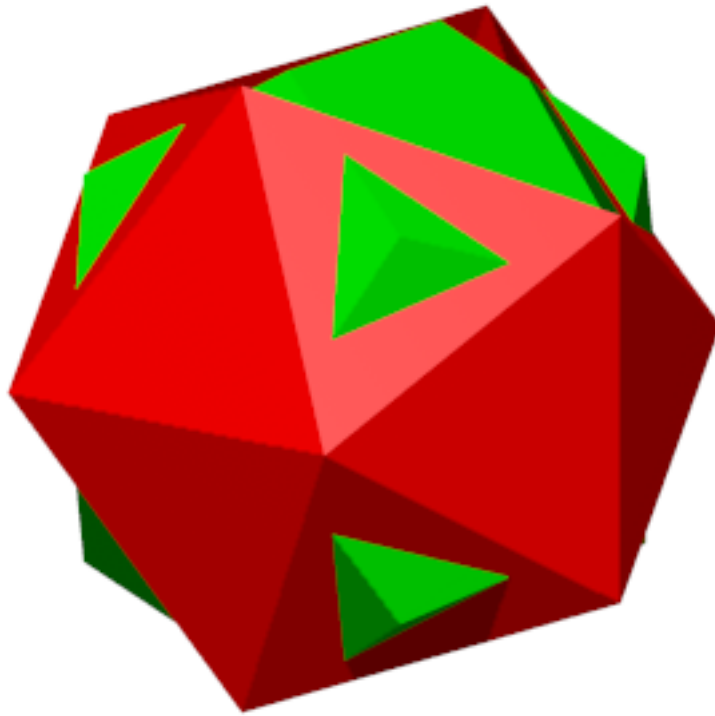


Abb. 3: Ikosaeder teilweise abgedeckt

Wenn wir das gedrehte Dodekaeder etwas vergrößern, werden die extrem liegenden Kanten sichtbar (Abb. 4).

Die extrem liegenden Kanten der beiden Körper liegen nun nicht mehr aufeinander, sondern paarweise parallel und damit paarweise in einer Ebene.

Die restlichen Kanten der beiden Körper sind windschief.

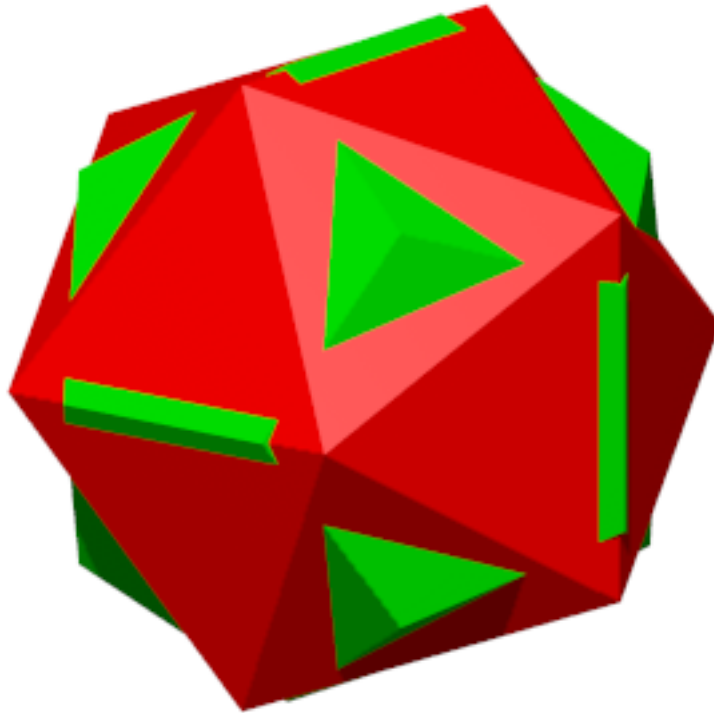


Abb. 4: Leichte Vergrößerung des Dodekaeders

In der Abbildung 5 ist das Dodekaeder weiter vergrößert worden. Die extrem liegenden Kanten sind nach wie vor parallel. Die restlichen Kanten von Dodekaeder und Ikosaeder nähern sich paarweise einander an. Damit ist es nur eine Frage der Zeit, bis sie sich treffen.

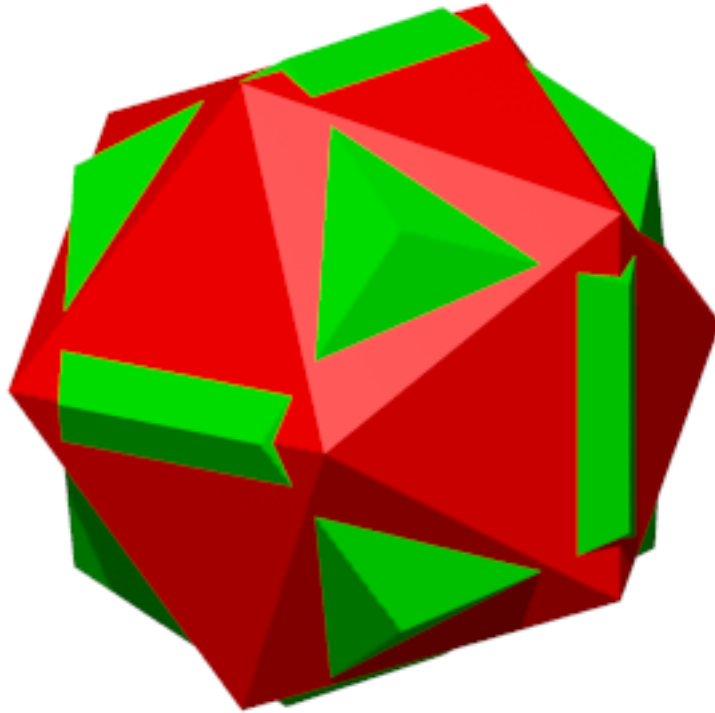


Abb. 5: Weitere Vergrößerung des Dodekaeders

In der Abbildung 6 ist es soweit. Die restlichen Kanten schneiden sich paarweise und liegen somit paarweise in einer Ebene.

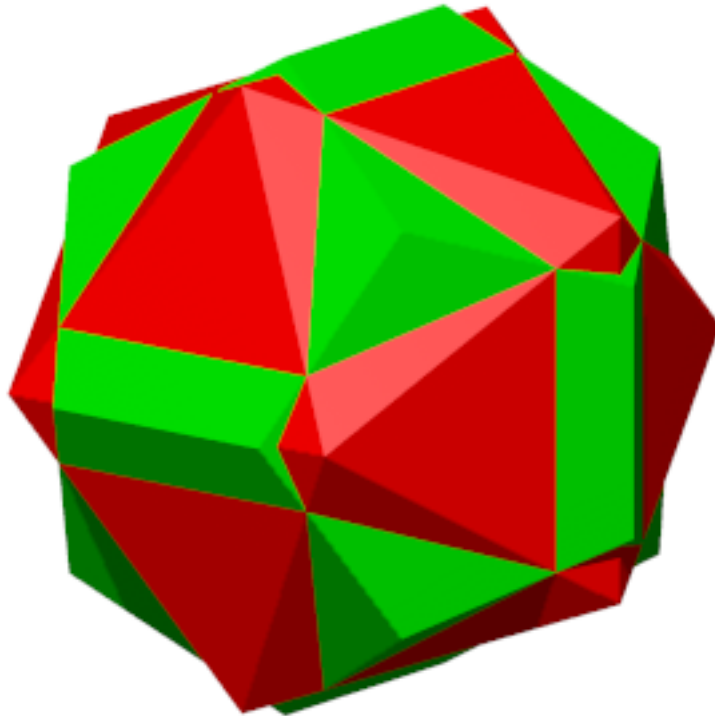


Abb. 6: Lösung des Problems

5 Daten

5.1 Kantenlängen

Wir setzen die Kantenlänge des Ikosaeders auf 1. Das initiale Dodekaeder in den Abbildungen 1 und 2 hat damit die Kantenlänge:

$$s_{\text{Dodekaeder}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi} \approx 0.6180 \quad (1)$$

Dabei erscheint der Goldene Schnitt (Walser 2013):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180 \quad (2)$$

Das vergrößerte Dodekaeder der Lösung (Abb. 6) hat die Kantenlänge:

$$s_{\text{vergrößertes Dodekaeder}} = \frac{21-3\sqrt{5}}{22} \approx 0.6496 \quad (3)$$

Aus (2) und (3) erhalten wir den Vergrößerungsfaktor:

$$\text{Vergrößerungsfaktor} = \frac{3}{22}(1+3\sqrt{5}) \approx 1.0511 \quad (4)$$

5.2 Schnittpunkte und Schnittwinkel

Die grünen Dodekaederkanten (Abb. 6 und 7) werden durch die roten Ikosaederkanten gedrittelt. Umgekehrt werden die roten Ikosaederkanten so geteilt, dass das Verhältnis vom kurzen Teil zum ganzen Teil durch

$$\frac{7-\sqrt{5}}{22} \approx 0.2165 \quad (5)$$

gegeben ist. Also kein rationales Teilverhältnis.

In der Abbildung 7 sind die 24 Schnittpunkte der Dodekaederkanten mit den Ikosaederkanten eingezeichnet.

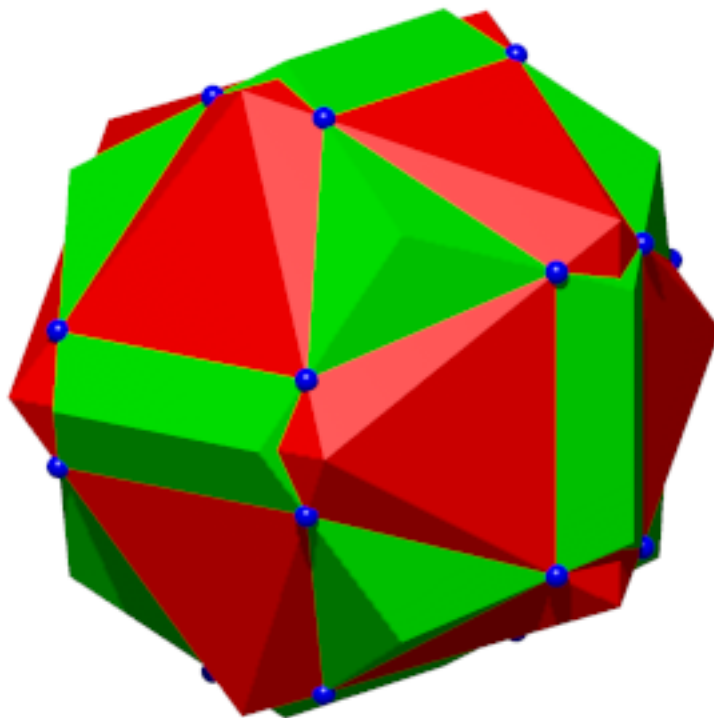


Abb. 7: Schnittpunkte

Für den Schnittwinkel gilt:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{1}{4}\Phi^2\right) \approx 0.85726 = 49.1176^\circ \quad (6)$$

5.3 Oberflächen

Das Ikosaeder hat die Oberfläche:

$$S_{\text{Ikosaeder}} = 5\sqrt{3} \approx 8.6603 \quad (7)$$

Das Dodekaeder der Lösung (Abb. 6 und 7) hat die Oberfläche:

$$S_{\text{vergrößertes Dodekaeder}} = 15\left(\frac{21-3\sqrt{5}}{22}\right)^2 \tan\left(\frac{3}{10}\pi\right) \approx 8.7128 \quad (8)$$

Die Oberflächen sind fast gleich groß. Das Oberflächenverhältnis ist etwa 1.0061.

Literatur

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing, über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.

Weblinks

Hans Walser: Oberflächengleiche platonische Körper und Kugel

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Oberflaechengleich/Oberflaechengleich.htm

Hans Walser: Oberflächengleiche platonische Körper und Kugel 2

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Oberflaechengleich2/Oberflaechengleich2.htm