Hans Walser, [20180120]

Doppelter Pythagoras

1 Problem

Gesucht sind Zahlentripel (a,b,c) mit:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

und:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2 \tag{2}$$

In (1) erkennen wir den Pythagoras, in (2) seinen älteren Bruder.

2 Bearbeitung

Wir subtrahieren (1) von (2) und erhalten:

$$2a+1+2b+1 = 2c+1 \tag{3}$$

Umformen ergibt:

$$\begin{aligned} a+b+\tfrac{1}{2} &= c \\ a+b+\tfrac{1}{2} &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Quadrieren liefert:

$$\begin{aligned} 2ab+a+b+\tfrac{1}{4} &= 0 \\ \left(a+\tfrac{1}{2}\right)\left(b+\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{8} \end{aligned} \tag{5}$$

Daraus ergibt sich:

$$b(a) = \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{a+\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} \tag{6}$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel (Abb. 1).

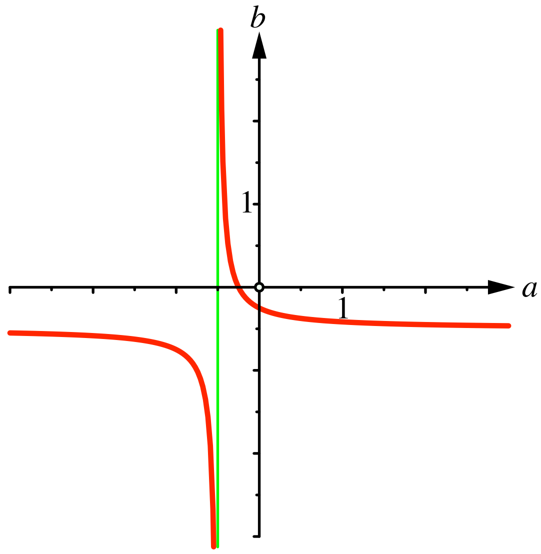

Abb. 1: Lösungsmenge

Wir sehen, dass es keine Lösung mit positivem a und positivem b gibt. Trotzdem lohnt es sich, einige Lösungen anzusehen.

3 Ausgewählte Lösungen

3.1 Alte Bekannte

Für $a=-\frac{3}{8}$ liefert (6) den Wert $b=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$. Es ist dann $c=\frac{5}{8}$. Wir haben also bis auf das Vorzeichen bei a das Lehrerdreieck mit dem Seitenverhältnis $a:b:c=3:4:5$ (gelb in Abb. 2).

Weiter ist $a+1=\frac{5}{8}$, $b+1=\frac{12}{8}$ und schließlich $c+1=\frac{13}{8}$. Wir haben das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis $5:12:13$ (zyan in Abb. 2).

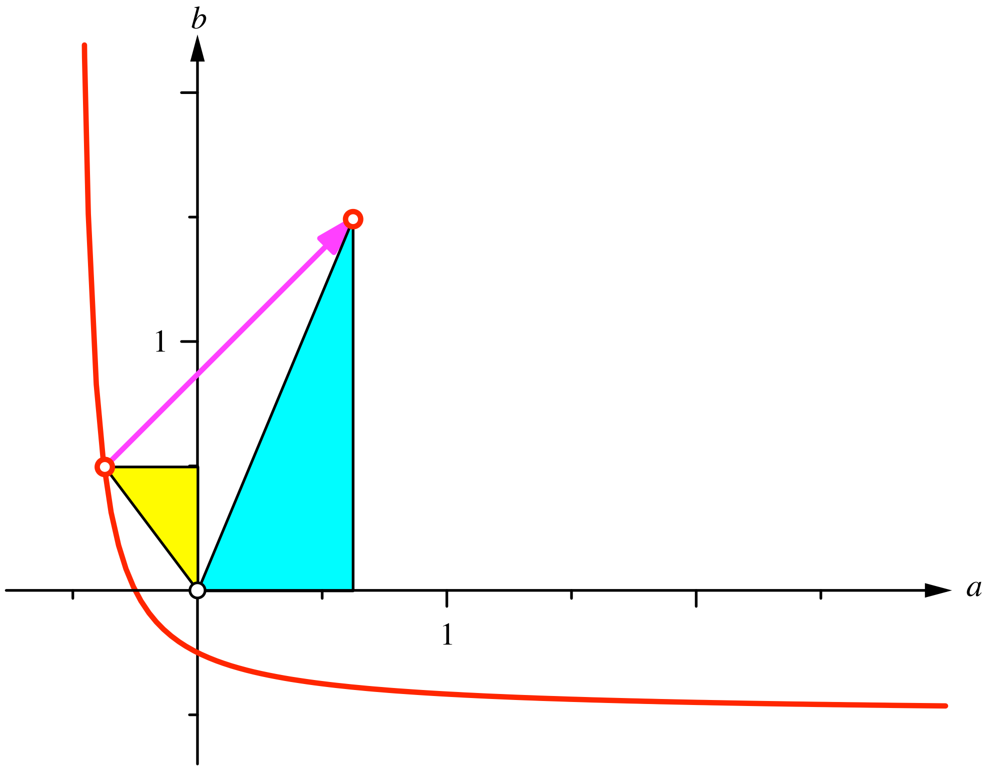

Abb. 2: Zwei pythagoreische Dreiecke

3.2 Weitere Bekannte

Für $a=-\frac{5}{12}$ liefert (6) den Wert $b=1=\frac{12}{12}$. Es ist dann $c=\frac{13}{12}$. Wir haben also bis auf das Vorzeichen bei a den schon angetroffenen alten Bekannten mit dem Seitenverhältnis $a:b:c=5:12:13$ (gelb in Abb. 3).

Weiter ist $a+1=\frac{7}{12}$, $b+1=2=\frac{24}{12}$ und schließlich $c+1=\frac{25}{12}$. Wir haben das pythagoreisches Dreieck mit dem Seitenverhältnis $7:24:25$ (zyan in Abb. 3).

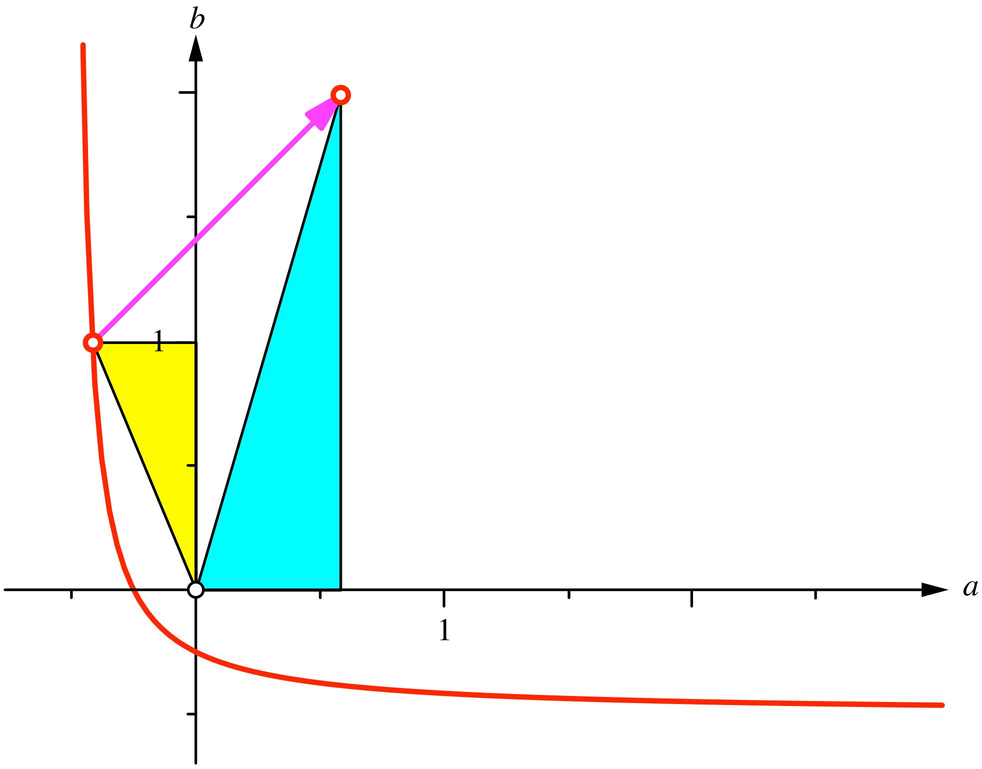

Abb. 3: Nochmals zwei pythagoreische Dreiecke

3.3 Noch ein Beispiel

Für $a=-\frac{2}{5}=-\frac{8}{20}$ liefert (6) den Wert $b=\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$. Es ist dann $c=\frac{17}{20}$. Wir haben also bis auf das Vorzeichen bei a den schon angetroffenen alten Bekannten mit dem Seitenverhältnis $a:b:c=8:15:17$ (gelb in Abb. 4).

Weiter ist $a+1=\frac{12}{20}$, $b+1=\frac{35}{20}$ und schließlich $c+1=\frac{37}{20}$. Wir haben das pythagoreisches Dreieck mit dem Seitenverhältnis $12:35:37$ (zyan in Abb. 4).

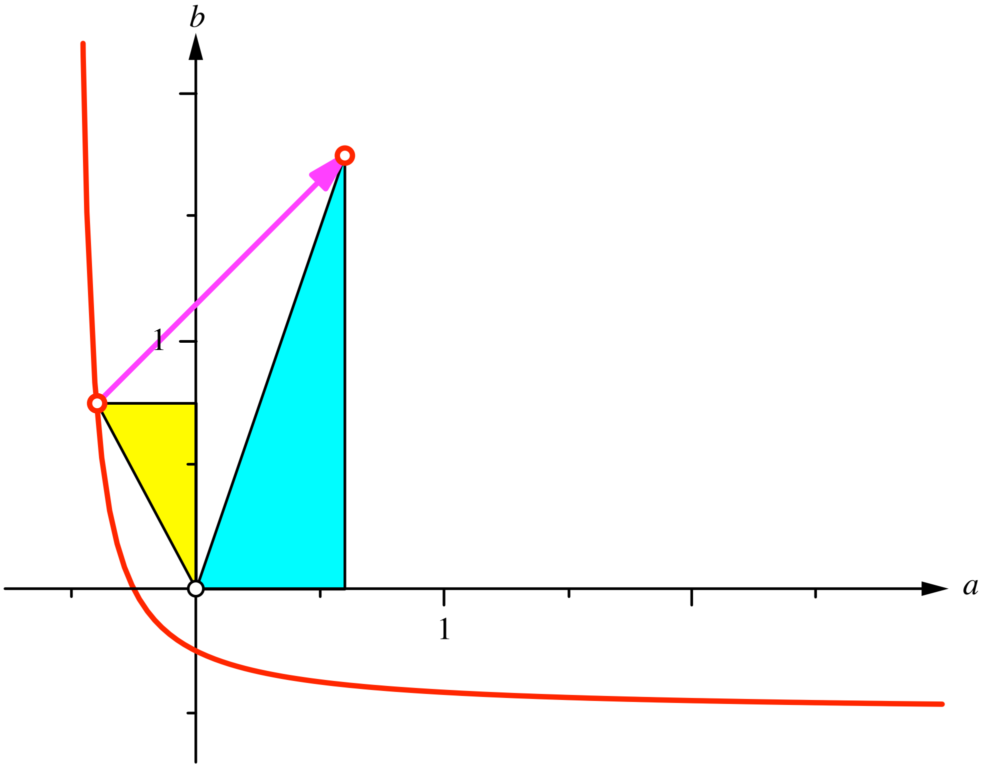

Abb. 4: Pythagoreische Dreiecke

3.4 Allgemein

Die Beispiele sind nicht umwerfend. Sobald wir ein pythagoreisches Dreieck mit rationalen Seiten haben, ergibt die Addition von 1 wieder ein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seiten, also wieder ein pythagoreisches Dreieck.