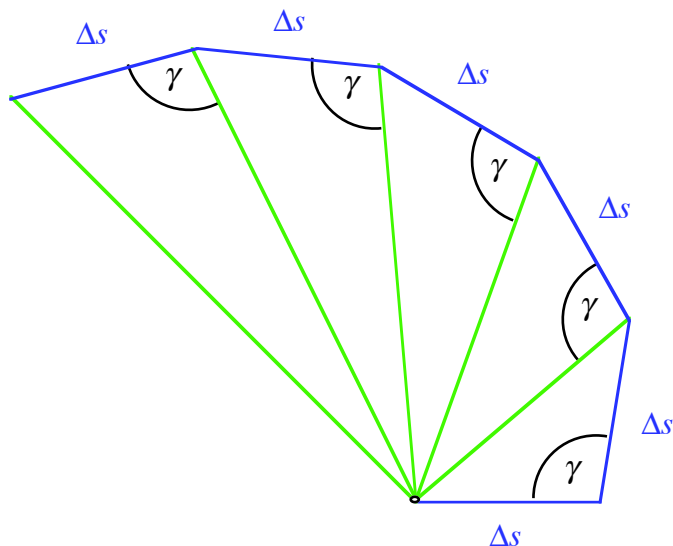


Dreiecksketten

1 Worum es geht

Wir zeichnen eine Kette von Dreiecken gemäß Figur. In der Figur ist $\gamma = 100^\circ$. Es entsteht ein gleichseitiger Polygonzug. Wie lässt sich das Verhalten dieses Polygonzuges beschreiben?



Was für eine Kurve entsteht?

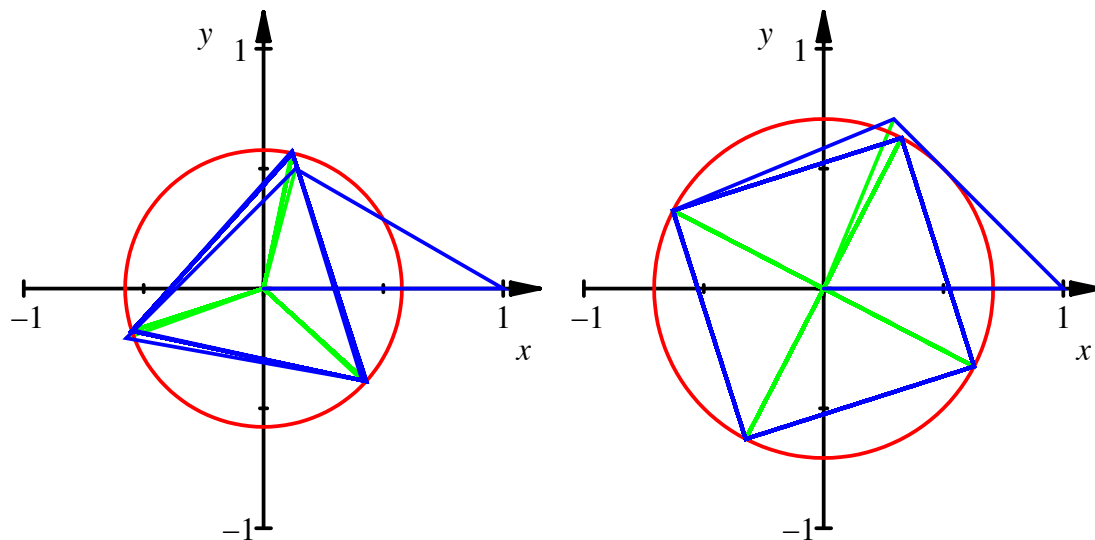
Der Verhalten des Polygonzuges hängt wesentlich vom Winkel γ ab. Für spitze Winkel γ ergibt sich eine (regelmäßige) Grenzfigur, für einen rechten Winkel γ erhalten wir eine archimedische Spirale und für stumpfe Winkel γ eine logarithmische Spirale.

2 Fallunterscheidung

2.1 Spitze Winkel

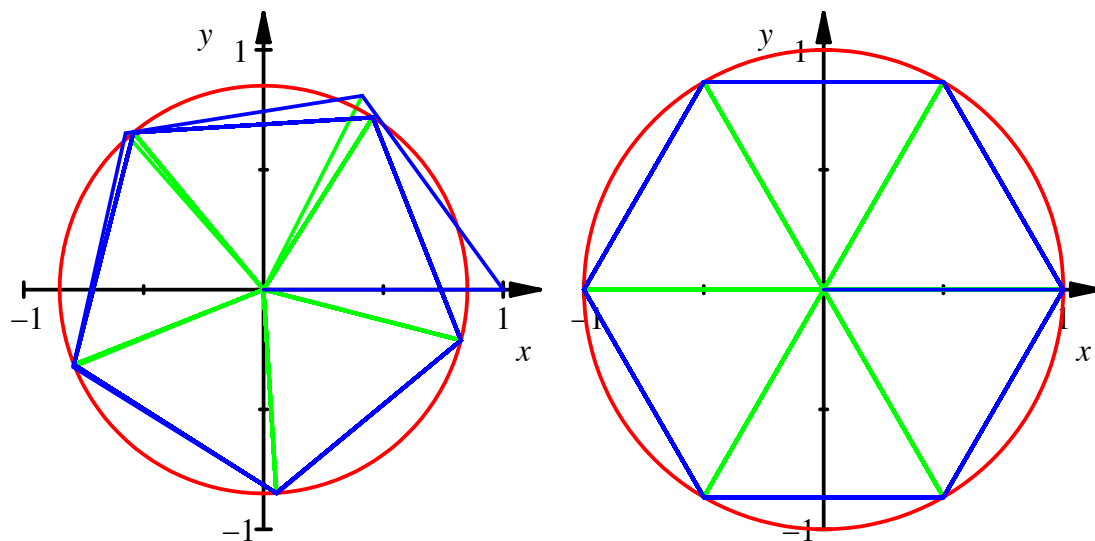
Für spitze Winkel γ tendiert der Polygonzug gegen ein gleichseitiges Sehnenvieleck mit Zentriwinkeln $(180^\circ - 2\gamma)$. Falls $(180^\circ - 2\gamma)$ eine Teiler von 360° ist, ergibt sich ein regelmäßiges Polygon mit Innenwinkel 2γ als Grenzfigur. Wenn $(180^\circ - 2\gamma)$ in einem rationalen Verhältnis zu 360° steht, aber kein Teiler von 360° ist, erhalten wir als Grenzfigur einen Stern, der sich aus Diagonalen gleicher Länge eines regelmäßigen Vieleckes zusammensetzt. An den Sternspitzen haben wir ebenfalls Innenwinkel 2γ . Bei irrationalem Verhältnis zu 360° ergibt sich ein überall dicht belegter Kreisring. Im Folgenden einige Beispiele mit jeweils $\Delta s = 1$.

Für $\gamma = 30^\circ$ oder $\gamma = 45^\circ$ ergeben sich als Grenzfigur ein regelmäßiges Dreieck beziehungsweise ein Quadrat.



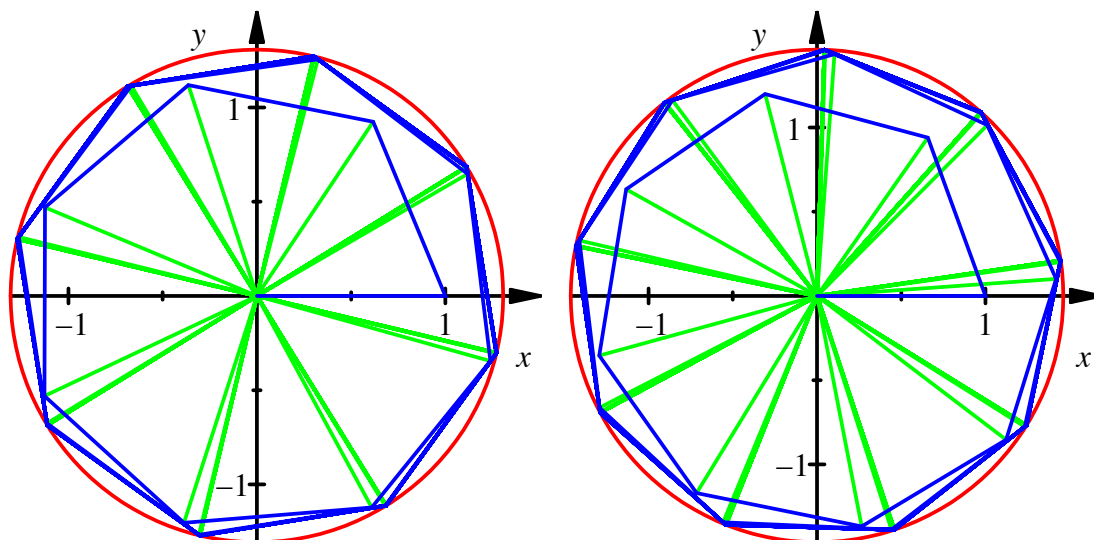
Dreieck und Quadrat

Für $\gamma = 54^\circ$ erhalten wir als Grenzfigur ein regelmäßiges Fünfeck, für $\gamma = 60^\circ$ auf Anhieb das regelmäßige Sechseck.



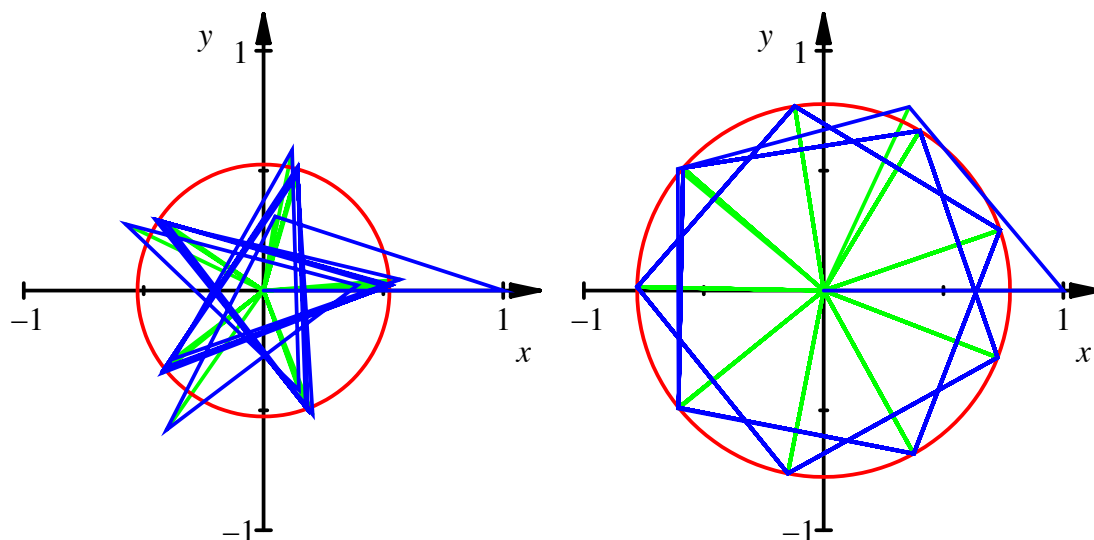
Fünfeck und Sechseck

Für $\gamma = 67.5^\circ$ und $\gamma = 70^\circ$ ergeben sich Achteck und Neuneck.



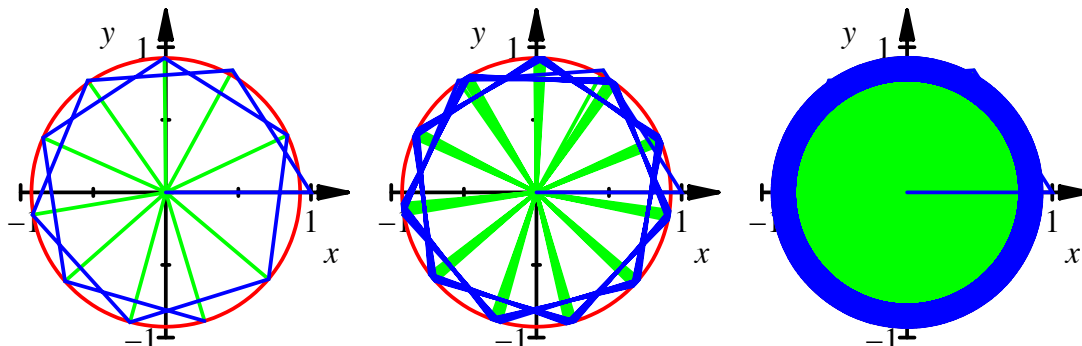
Achteck und Neuneck

Für $\gamma = 18^\circ$ ist $\frac{360^\circ}{180^\circ - 2\gamma} = \frac{5}{2}$; wir erhalten als Grenzfigur ein Pentagramm, das aus einem regelmäßigen Fünfeck durch Überspringen jeder zweiten Ecke entsteht. Für $\gamma = 50^\circ$ ist $\frac{360^\circ}{180^\circ - 2\gamma} = \frac{9}{2}$; wir erhalten eine Grenzfigur, welche aus einem regelmäßigen Neuneck durch Überspringen jeder zweiten Ecke entsteht.



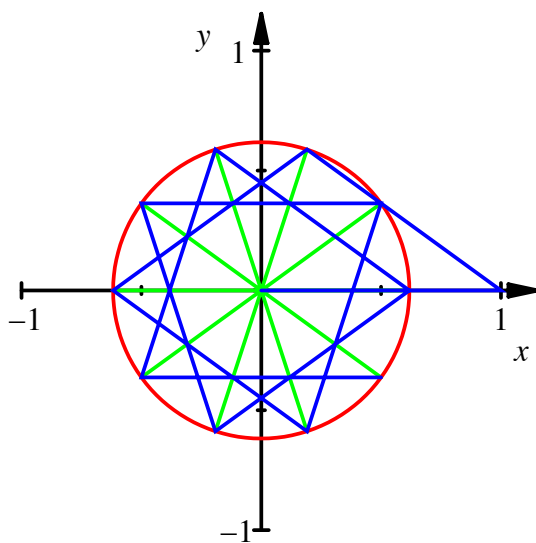
Sternfiguren

Wir wählen nun $\gamma = 1$ im Bogenmaß, also $\gamma = 1 = \frac{1}{2\pi} 360^\circ \approx 57.29577951308^\circ$. Dieser Winkel steht nicht in einem rationalen Verhältnis zu 360° . In der folgenden Abbildung sind der Reihe nach 10, 100 und 1000 Dreiecke gezeichnet.



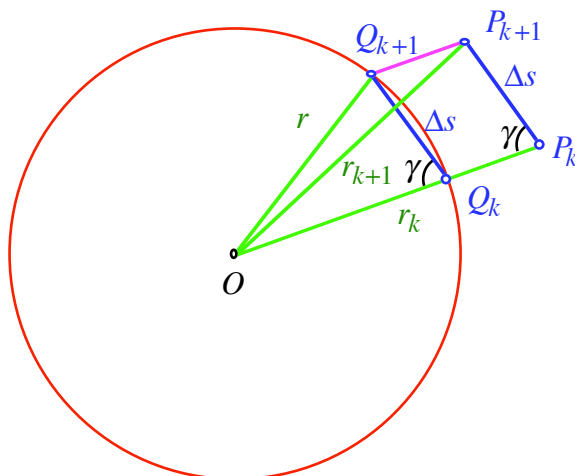
Irrationales Verhältnis

Beweisskizze: Falls einer der grünen Radien die Länge $r = \frac{\Delta s}{2 \cos(\gamma)}$ hätte, dann auch alle folgenden Radien. Wir hätten eine Folge von gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis Δs und den Basiswinkeln γ . Dies wäre der stabile Fall. Dieser stabile Fall tritt exakt ein für $\gamma = 60^\circ$ oder für $\gamma = 36^\circ$. (Gibt es weitere stabile Fälle?)



Stabiler Fall für $\gamma = 36^\circ$

Wenn nun zum Beispiel $r_k > r = \frac{\Delta s}{2 \cos(\gamma)}$ ist, dann haben wir im Vergleich zum stabilen Fall die Situation der Skizze:



Vergleich mit stabilem Fall

Auf Grund der Dreiecksungleichung ist

$$r_{k+1} < r + \overline{Q_{k+1}P_{k+1}} = r + \overline{Q_kP_k} = r_k$$

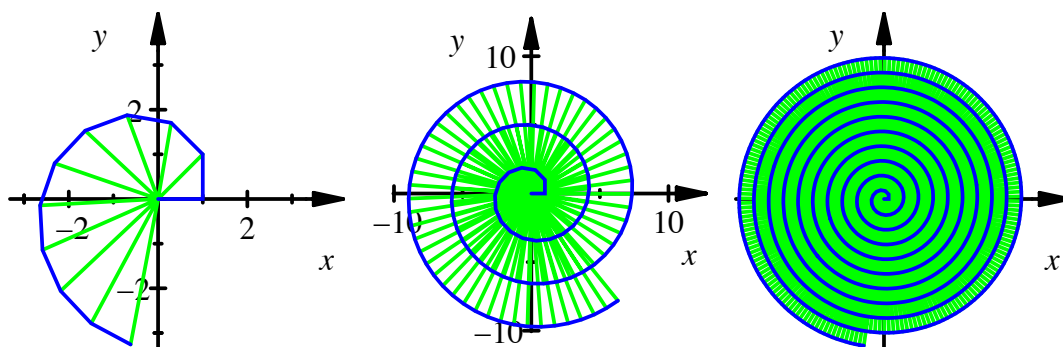
Die Folge der Radien ist monoton fallend. Es ist sogar $r_{k+1} - r \approx (r_k - r) \cos(180^\circ - 2\gamma)$.

Für $r_k < r = \frac{\Delta s}{2 \cos(\gamma)}$ erhalten wir entsprechend eine monoton wachsende Folge von Radien.

Somit ist $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = r = \frac{\Delta s}{2 \cos(\gamma)}$; die Figur strebt gegen den stabilen Fall.

2.2 Rechter Winkel

Für $\gamma = 90^\circ$ entsteht eine Figur mit aufgesetzten rechtwinkligen Dreiecken. Bei $\Delta s = 1$ erhalten wir für die Radien die Werte $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$. Der Polygonzug tendiert gegen eine *archimedische Spirale* (vgl. [Walser 2004]).

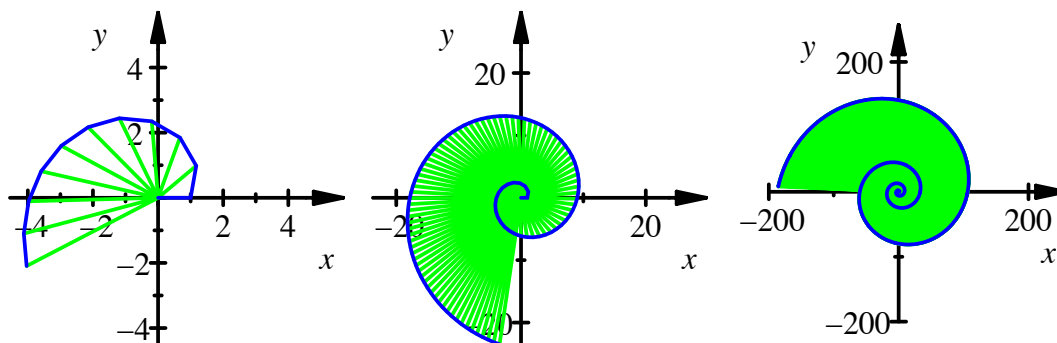


Archimedische Spirale

2.3 Stumpfer Winkel γ

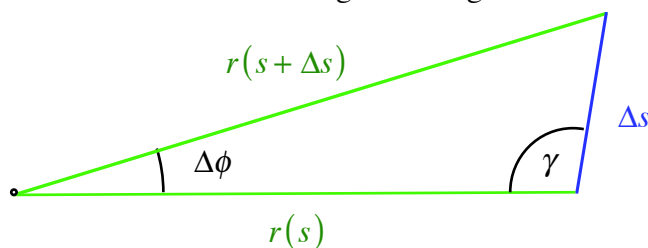
Für $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ erhalten wir einen Polygonzug, der eine *logarithmische Spirale* als Grenzkurve hat. Dies ist nicht trivial, da die Dreiecke ja nicht ähnlich sind; wir haben keine Schneckenhaus-Situation.

Die Figurenfolge zeigt die Situation für $\gamma = 100^\circ$ und $\Delta s = 1$; es sind 10, 100 und 1000 Dreiecke gezeichnet.



Logarithmische Spirale

Zum Beweis verwenden wir die Bezeichnungen der Figur:



Bezeichnungen

Da Δs konstant ist, wächst der Radius r nach außen, und der Winkel $\Delta\phi$ geht gegen null. „Weit außen“ sind also die Radien nahezu parallel, und es gilt:

$$\Delta r = r(s + \Delta s) - r(s) \approx -\cos(\gamma)\Delta s$$

$$\Delta\phi \approx \frac{\sin(\gamma)\Delta s}{r}$$

Daraus erhalten wir:

$$\Delta\phi \approx -\tan(\gamma)\frac{\Delta r}{r}$$

Wir arbeiten nun differenziell weiter:

$$d\phi = -\tan(\gamma)\frac{dr}{r}$$

$$\phi = \int d\phi = -\tan(\gamma)\int \frac{dr}{r} = -\tan(\gamma)(\ln(r) + C)$$

$$\ln(r) = \frac{\phi}{-\tan(\gamma)} - C$$

$$r(\phi) = e^{\frac{\phi}{-\tan(\gamma)} - C}$$

Dies ist die Polargleichung einer logarithmischen Spirale.

Literatur

- [Walser 2004] Walser, Hans: Pythagoras, eine archimedische Spirale und eine Approximation von π . *Praxis der Mathematik* (6/46), 2004, S. 287-288