Hans Walser, [20210213]

1 Problemstellung

Die Frage, ob sich aus drei Seitenlänge a, b, c ein (reelles) Dreieck konstruieren lässt, wird durch die so genannte Dreiecksungleichung beantwortet. In Worten lautet sie so: die Summe zweier Dreiecksseiten muss größer oder gleich der dritten Seite sein. Im Falle der Gleichheit haben wir ein „flaches“ Dreieck mit dem Flächeninhalt null.

In Formeln:

$$\begin{aligned} a+b &\geq c \\ b+c &\geq a \\ c+a &\geq b \end{aligned} \tag{1}$$

Wir haben es also mit drei Ungleichungen zu tun.

Frage: Lässt sich (1) in eine einzige Ungleichung packen?

2 Bearbeitung mit dem Kosinussatz

Falls es ein reelles Dreieck gibt, lässt sich der Winkel γ mit dem Kosinussatz berechnen:

$$\cos(\gamma) = \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab} \tag{2}$$

Für eine reelle Lösung muss:

$$\left| \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab} \right| \leq 1 \tag{3}$$

Das sind immer noch zwei Ungleichungen. Zudem ist die Formel „unschön“, weil asymmetrisch bezüglich der drei Dreiecksseiten.

Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\left(\frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab} \right)^2 \leq 1 \tag{4}$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 \leq 0 \tag{5}$$

Die Ungleichung (5) ist eine Lösung unseres Problems.

3 Mit Zirkel und Lineal

In einem kartesischen Koordinatensystem setzen wir $A:\left(-\frac{c}{2},0\right)$ und $B:\left(\frac{c}{2},0\right)$ (Abb. 1). Die Ecke C finden wir als Schnittpunkt der beiden Kreise:

$$\begin{aligned} k_a: &\quad \left(x-\tfrac{c}{2}\right)^2+y^2=a^2 \\ k_b: &\quad \left(x+\tfrac{c}{2}\right)^2+y^2=b^2 \end{aligned} \tag{6}$$

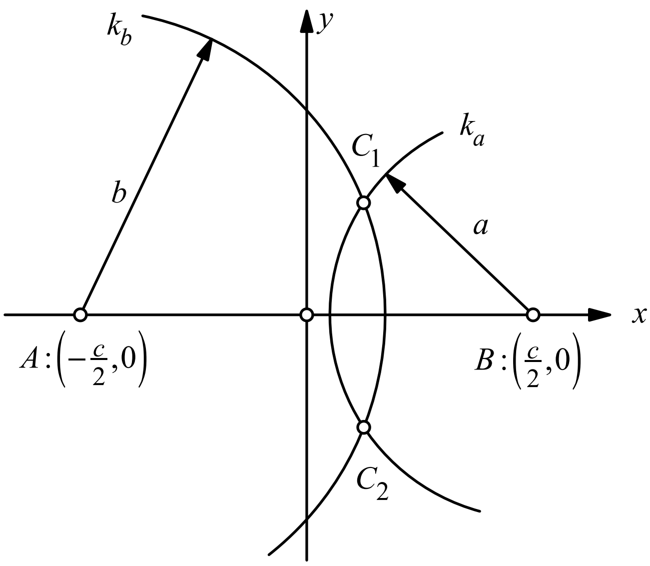

Abb. 1: Mit Zirkel und Lineal

Aus (6) erhalten wir zunächst:

$$x=\frac{b^2-a^2}{2c} \tag{7}$$

Das ist immer reell. Wir setzen nun (7) in die obere Gleichung von (6) ein und erhalten:

$$y^2=a^2-\left(\frac{b^2-a^2}{2c}-\frac{c}{2}\right)^2 \tag{8}$$

Wir formen (8) um zu:

$$y^2 = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}{4c^2} \tag{9}$$

Für reelle Lösungen für y darf die rechte Seite von (9) nicht negativ sein. Dies ist äquivalent zu:

$$-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 0 \tag{10}$$

Die Formel (10) ist gleichwertig zur Formel (5).

4 Heronsche Formel

Mit

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{11}$$

kann der Flächeninhalt A_{Dreieck} des Dreiecks nach der Heronschen Formel

$$A_{\text{Dreieck}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{12}$$

berechnet werden. Für eine reelle Lösung darf der Radikand in (12) nicht negativ sein. Einsetzen von (11) in diesen Radikanden liefert:

$$\tfrac{1}{16}\left(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\right) \geq 0 \tag{13}$$

Die Formel (13) ist äquivalent zu (5) und (10).