Hans Walser, [20200132]

Dritte binomische Formel

1 Worum geht es?

Mit der dritten binomischen Formel $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ kann ein Verfahren der Quadratur des Rechteckes bewiesen werden.

2 Das Verfahren

Die Figurenfolge 1 zeigt das Verfahren.

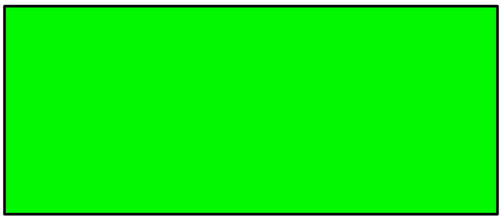

Abb. 1.1: Rechteck

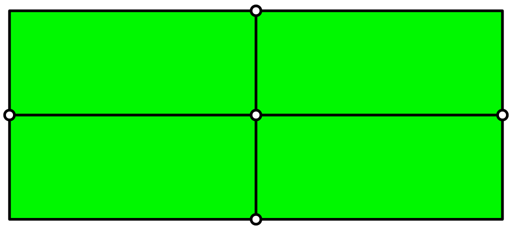

Abb. 1.2: Vierteln

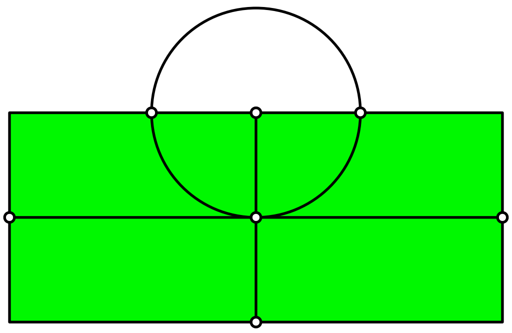

Abb.1.3: Kreis

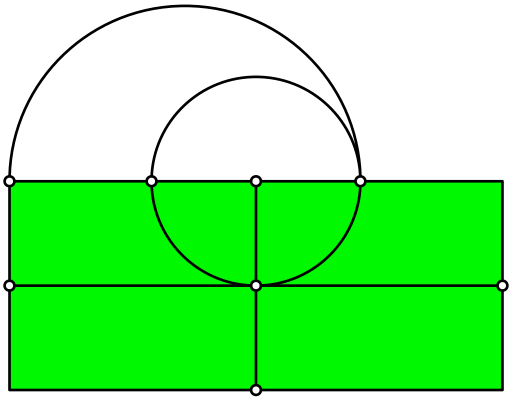

Abb. 1.4: Thaleskreis

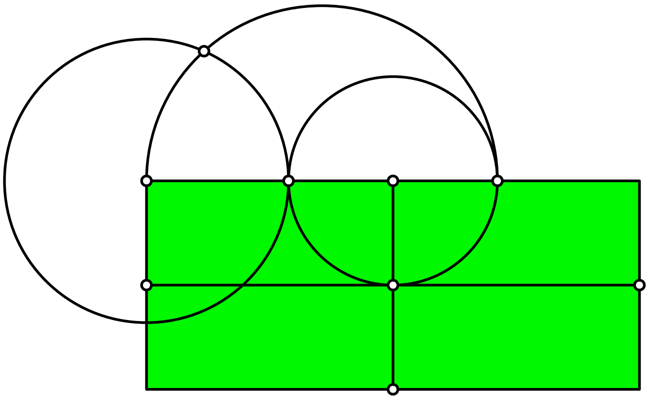

Abb. 1.5: Noch ein Kreis

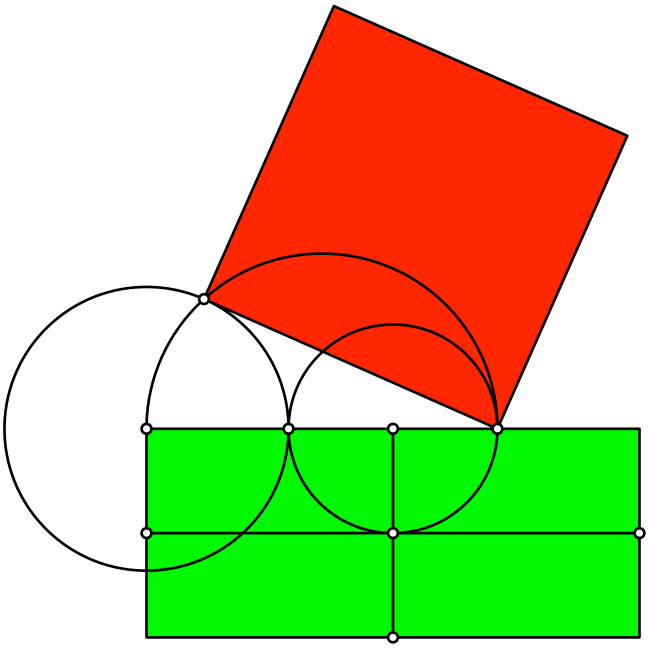

Abb. 1.6: Flächengleiches Quadrat

3 Der Beweis

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 2.

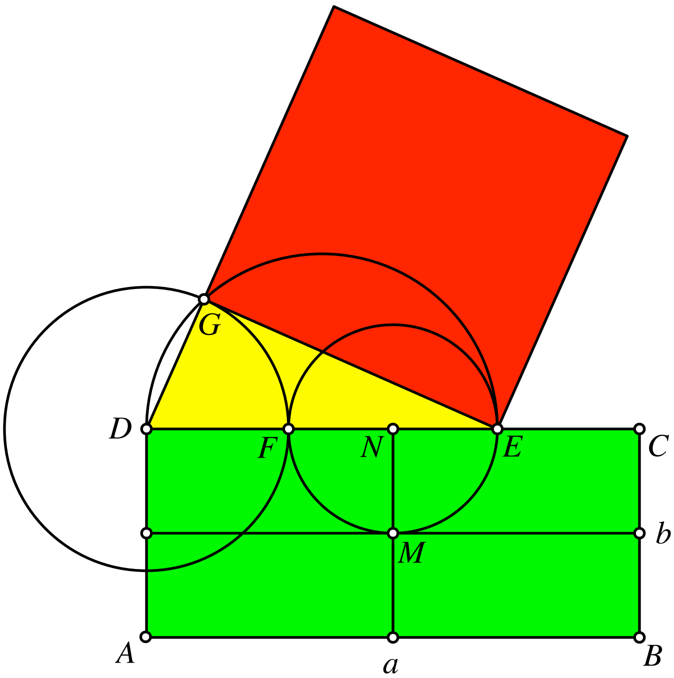

Abb. 2: Bezeichnungen

Das Rechteck *ABCD* hat den Flächeninhalt *ab*. Weiter ist:

$$\overline{DE} = \tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{2} \quad , \quad \overline{DF} = \tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2} \tag{1}$$

Dies sind die Hypotenuse und die eine Kathete des gelb eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks *DEG*. Nach dem Satz des Pythagoras hat das rote Kathetenquadrat daher den Flächeninhalt *S*:

$$S = \left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Gemäß der dritten binomischen Formel ergibt sich:

$$S = \left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{2}\right) + \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right)\right)\left(\left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{2}\right) - \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right)\right) = ab \tag{3}$$

Dies war zu zeigen.

4 Vergleich

Die Abbildung 3 zeigt den Vergleich mit den Konstruktionen mit dem Höhensatz (magenta) und dem Kathetensatz (orange).

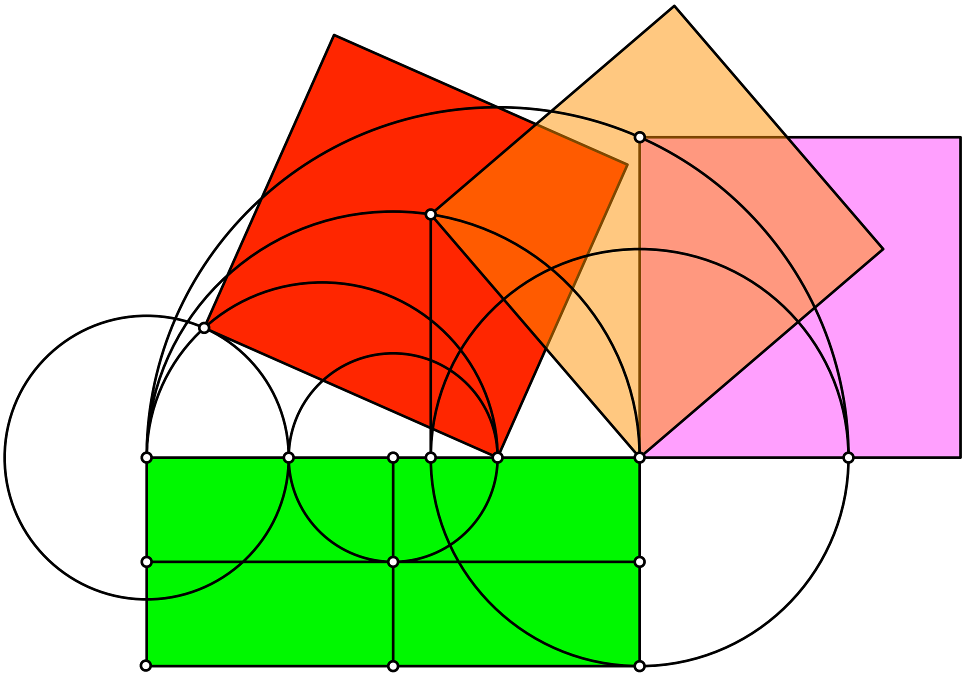

Abb. 3: Vergleich