

Dritteln durch Halbieren

1 Fragestellung

Wie kann eine Strecke AB gedrittelt werden, wenn folgende Hilfsmittel zur Verfügung stehen?

- Halbieren einer Strecke
- Gerade durch zwei Punkte
- Schneiden zweier Geraden

2 Der mühsame Weg übers Unendliche

Wir halbieren die Strecke AB und nennen den Mittelpunkt M_1 . Dann sei M_2 der Mittelpunkt der Strecke AM_1 ; M_3 der Mittelpunkt der Strecke M_1M_2 und allgemein M_{i+1} der Mittelpunkt der Strecke $M_{i-1}M_i$. Ferner sei $D = \lim_{i \rightarrow \infty} (M_i)$. Dieser Punkt D drittelt die Strecke AB .



Fortgesetztes halbieren

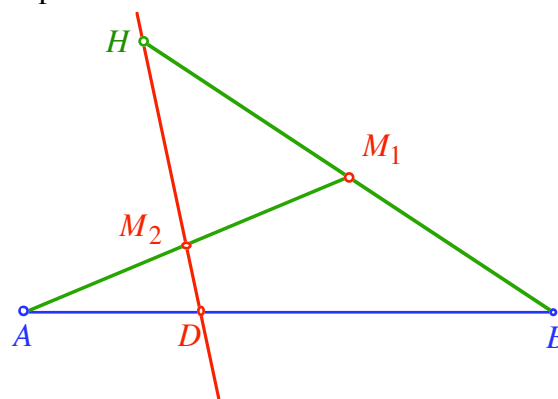
Der Beweis geht über die geometrische Folge. Wir setzen $AB = 1$ und erhalten:

$$AD = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \pm \dots = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = - \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Dieses Verfahren ist in der Theorie exakt, in der Praxis können wir nur näherungsweise arbeiten.

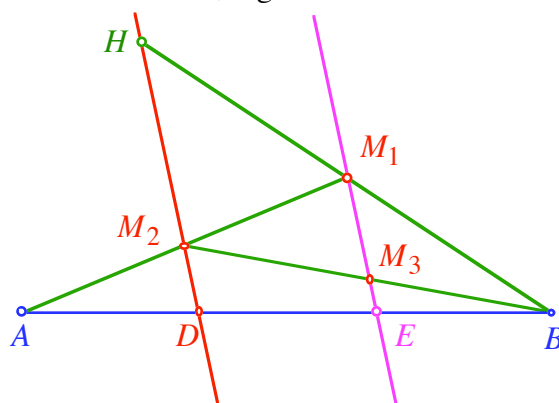
3 Der elegante Weg

Wir wählen einen Hilfspunkt H außerhalb der Geraden AB . Dann sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke BH und M_2 der Mittelpunkt der Strecke AM_1 . Die Gerade HM_2 schneidet AB im Drittpunkt D .



Zwei Mal halbieren

Wenn wir noch einmal mehr halbieren, ergibt sich der zweite Drittelpunkt.

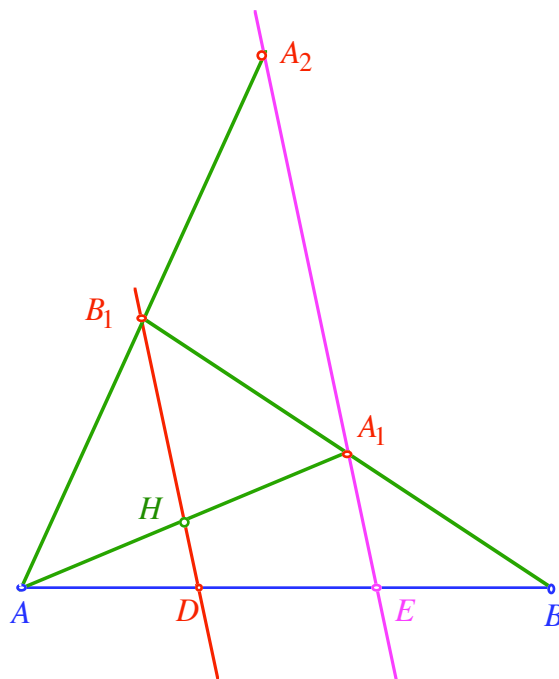


Drei Mal halbieren

Jetzt sehen wir auch sofort, wie die Sache zu beweisen ist, nämlich mit Strahlensätzen.

4 Verdoppeln

Natürlich geht es auch mit Verdoppeln, genauer: mit Punktspiegeln. Wir wählen wiederum einen Hilfspunkt H . Dann spiegeln wir A an H und erhalten A_1 . Nun spiegeln wir B an A_1 und erhalten B_1 . Nun spiegeln wir noch A an B_1 und erhalten A_2 . Die Gerade HB_1 schneidet AB im Drittelpunkt D , die Gerade A_1A_2 schneidet AB im anderen Drittelpunkt E .

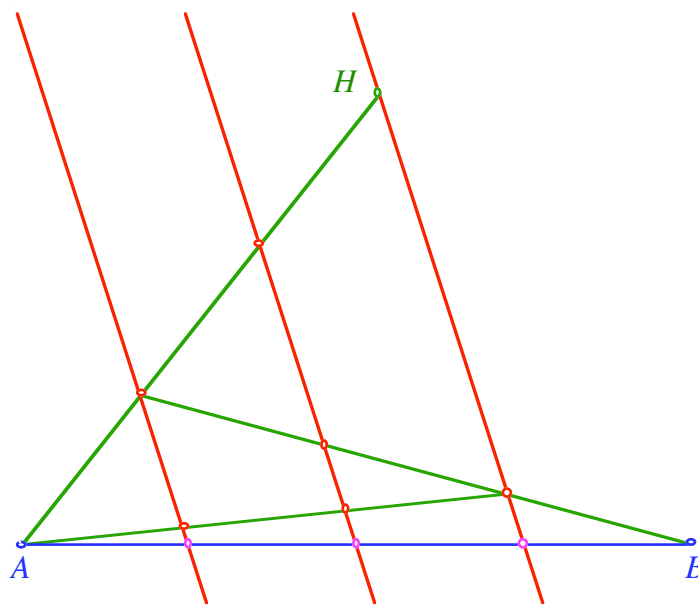


Verdoppeln

5 Dritteln

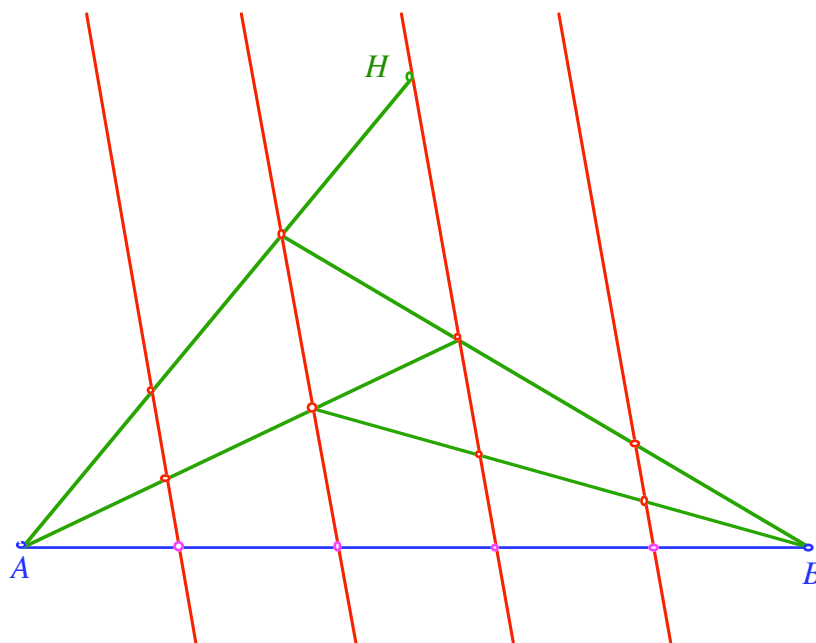
Nehmen wir an, wir hätten statt einem Halbierungswerkzeug ein Drittelungswerkzeug. Dieses Drittelungswerkzeug haben wir ja nach unseren Überlegungen mit dem Halbierungswerkzeug ebenfalls zur Verfügung. Was können wir damit tun?

Wie Figura zeigt, können wir die Strecke AB nun vierteln.



Drei Mal dritteln ergibt vierteln

Wir können aber auch fünfteln.



Vier Mal dritteln ergibt fünfteln

Allgemein: Mit einem Werkzeug, welches eine Strecke in n Teile teilen kann, können wir eine Strecke auch in $n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1$ Teile teilen.

Damit folgt induktiv, dass wir mit einem Halbierungswerkzeug eine Strecke in beliebig viele Teile teilen können.