Hans Walser, [20220924]

Eckennummerierung von Hyperwürfeln

1 Die Idee

Wir interpretieren die Eckpunktkoordinaten eines nd-Hyperwürfels in umgekehrter Reihenfolge als binäre Zahlen und nummerieren die betreffende Ecke mit dieser Zahl.

Die „umgekehrte Reihenfolge“ ist so zu verstehen: die Koordinaten [1,1,0] lesen wir als binäre Zahl 011, somit als Dezimalzahl 3.

2 Würfel im dreidimensionalen Raum

Die Tabelle 1 zeigt für den Würfel die Koordinaten und die zugeordneten Nummern.

Koordinaten	Nummer
[0, 0, 0]	0
[1, 0, 0]	1
[0, 1, 0]	2
[1, 1, 0]	3
[0, 0, 1]	4
[1, 0, 1]	5
[0, 1, 1]	6
[1, 1, 1]	7

Tab. 1: Koordinaten und Nummern

Die Abbildung 1 zeigt die Situation in zwei verschiedenen Darstellungen des Koordinatensystems („Stern“ und „Fächer“). Die Nummern diametral gegenüberliegender Würfelecken ergänzen sich jeweils auf sieben.

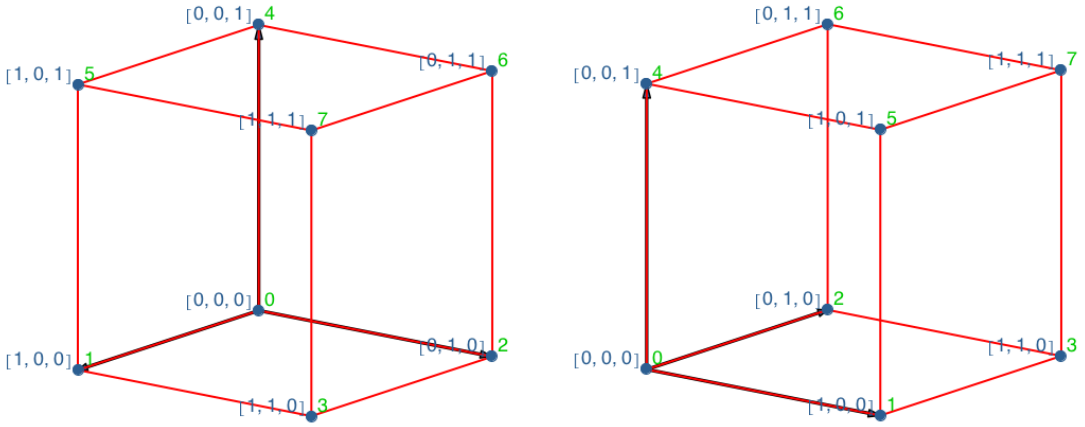

Abb. 1: Würfel

Nun verbinden wir die Ecken geradlinig gemäß den Nummern (Abb. 2). Man beachte, dass die räumlichen vorne/hinten-Beziehungen nicht korrekt dargestellt werden. Das liegt daran, dass es sich um rein zweidimensionale Darstellungen handelt. Die roten Würfelkanten werden zuerst gezeichnet, anschließend die grüne Zickzacklinie und zuletzt die blauen Eckpunkte.

Die grüne Zickzacklinie besteht aus 4 Teilstrecken der Länge 1 (Würfelkanten), 2 Teilstrecken der Länge √2 (Seitenflächendiagonalen) und einer Teilstrecke der Länge √3 (Raumdiagonale des Würfels).

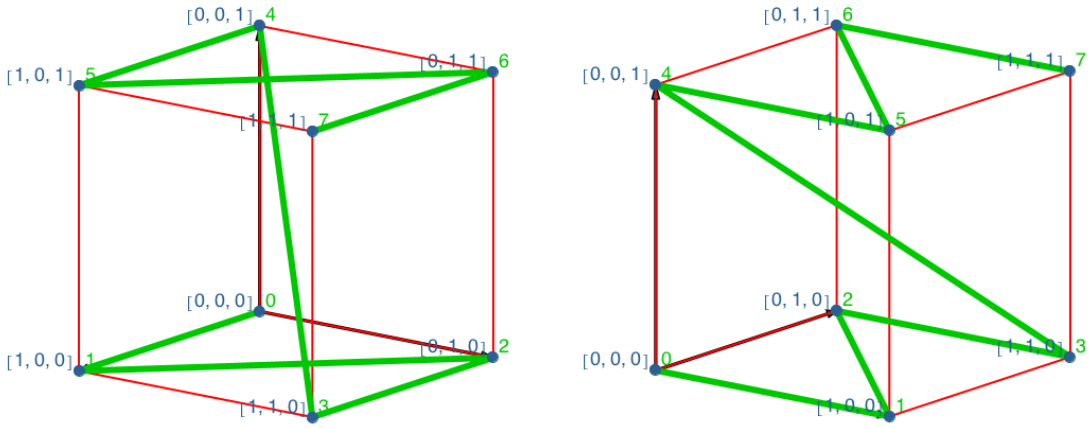

Abb. 2: Zickzacklinie den Nummern nach

3 Symmetrische Darstellungen

Die Abbildung 3 zeigt zwei symmetrische Darstellungen des Koordinatensystems. Die Kennzeichnung als „Stern“ beziehungsweise „Fächer“ ist offensichtlich.

Technisch handelt es sich um sogenannte *isometrische* Darstellungen.

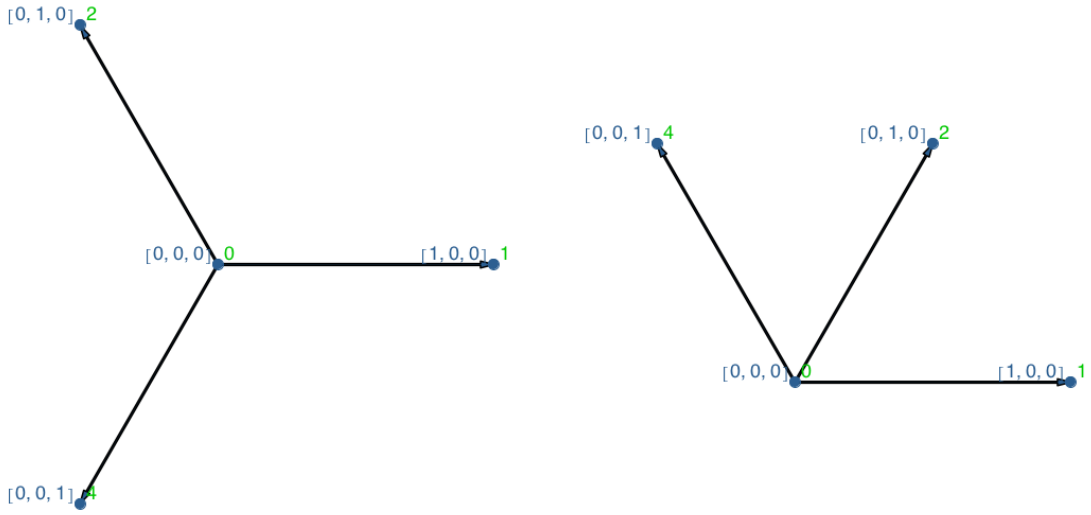

Abb. 3: Symmetrische Darstellungen des Koordinatensystems

Die Abbildung 4 zeigt die entsprechenden Würfeldarstellungen. In der Stern-Darstellung fallen der Ursprung und die dazu diametrale Würfelecke aufeinander. Daher ist die Zickzacklinie scheinbar geschlossen. Ärgerlicherweise schreibt der Computer bei aufeinanderfallenden Punkten auch die Koordinaten und die Nummern übereinander. Welche Punkte fallen in der Fächer-Darstellung aufeinander? Warum ist die Zickzack-linie scheinbar unterbrochen?

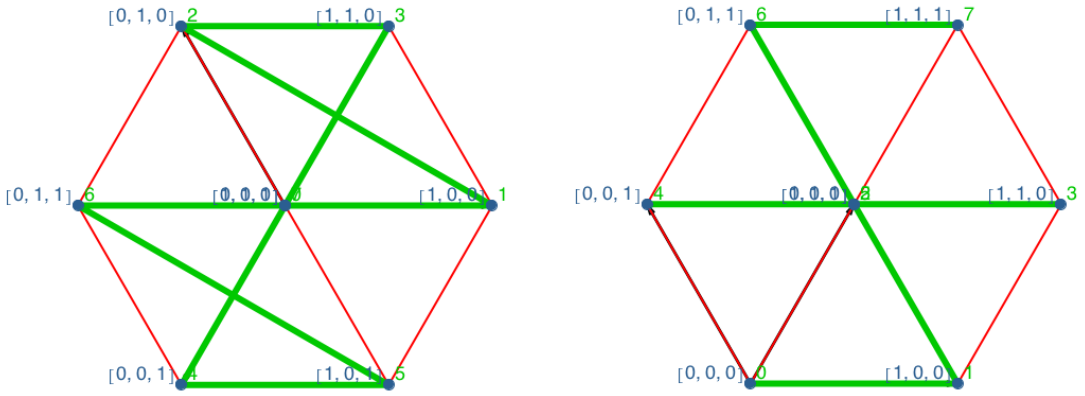

Abb. 4: Symmetrische Darstellungen

Die Abbildung 5 zeigt die analoge Situation für den vierdimensionalen Hyperwürfel.

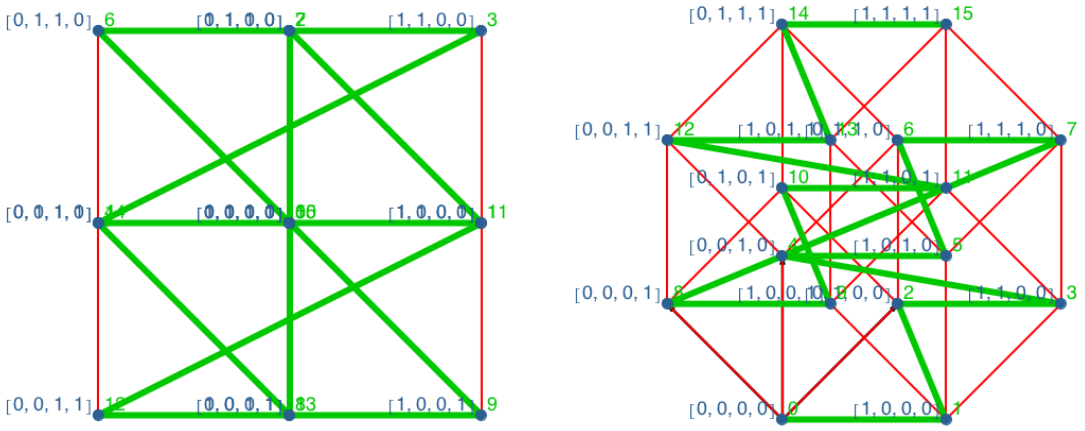

Abb. 5: Vierdimensionaler Hyperwürfel

4 Galerie

Die Abbildung 6 zeigt systematisch für jede Dimension die Stern-Darstellung und die Fächer-Darstellung. Dabei wird nur die grüne Zickzacklinie angegeben.

4.1 Dimension 1

Abb. 6.1: Dimension 1. Stern und Fächer

4.2 Dimension 2

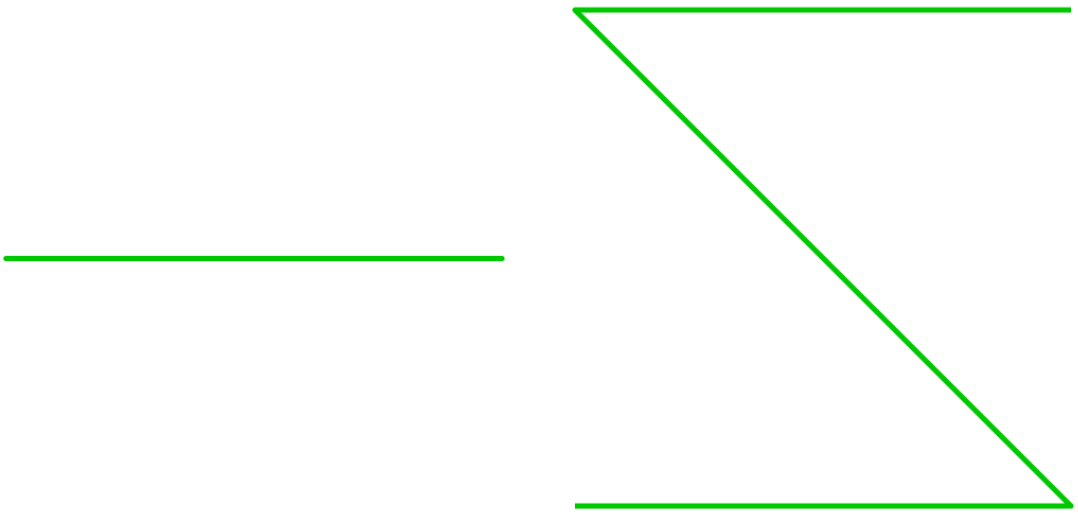

Abb. 6.2: Dimension 2. Stern und Fächer

4.3 Dimension 3

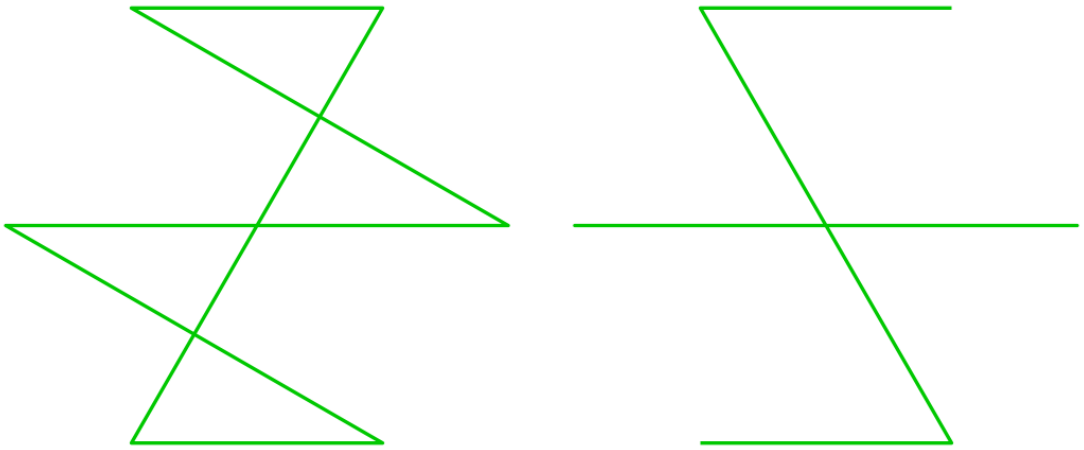

Abb. 6.3: Dimension 3. Stern und Fächer

4.4 Dimension 4

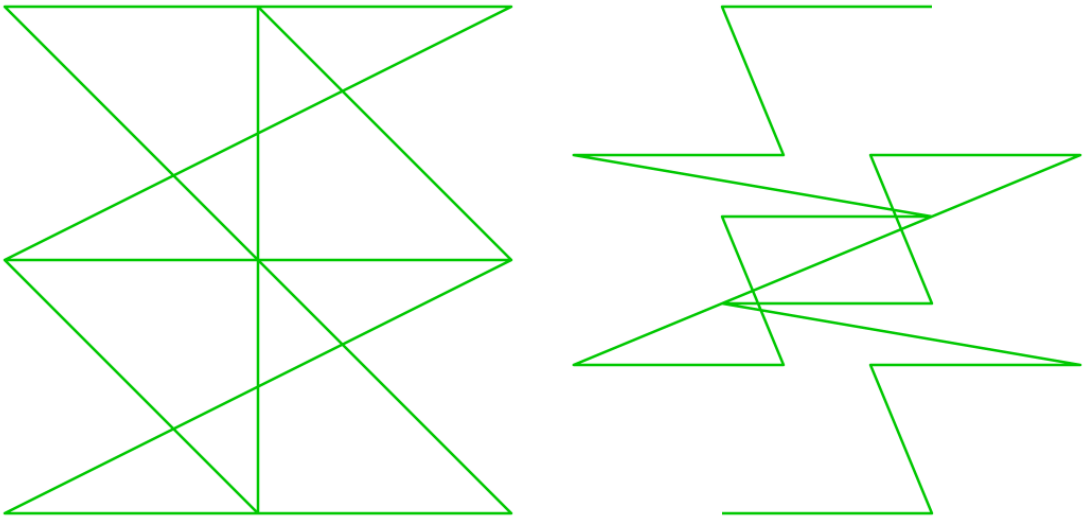

Abb. 6.4: Dimension 4. Stern und Fächer

4.5 Dimension 5

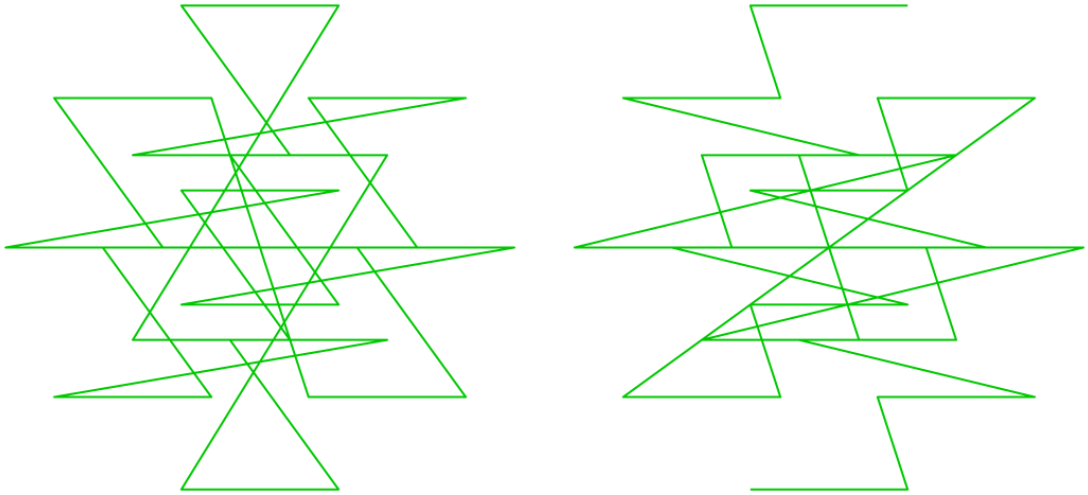

Abb. 6.5: Dimension 5. Stern und Fächer

4.6 Dimension 6

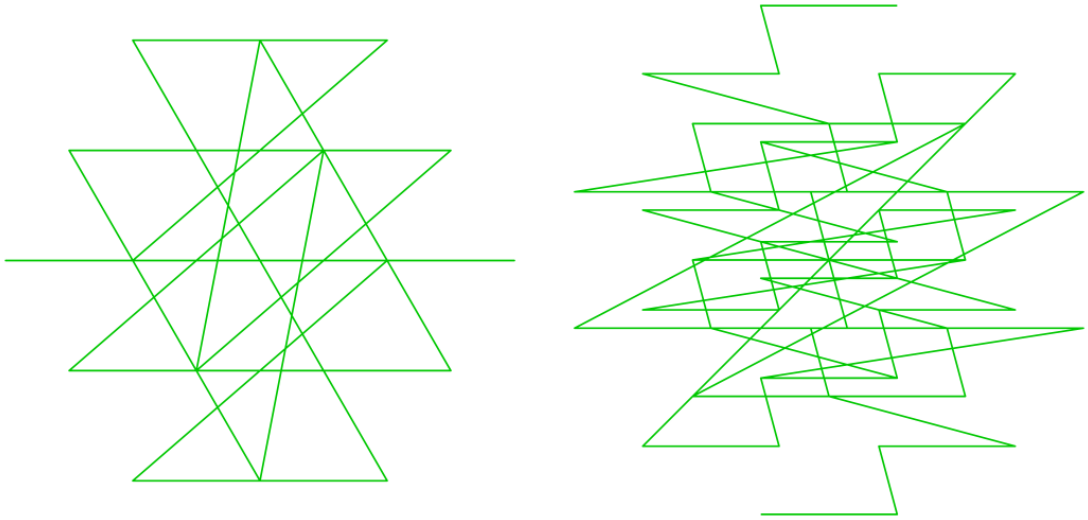

Abb. 6.6: Dimension 6. Stern und Fächer

4.7 Dimension 7

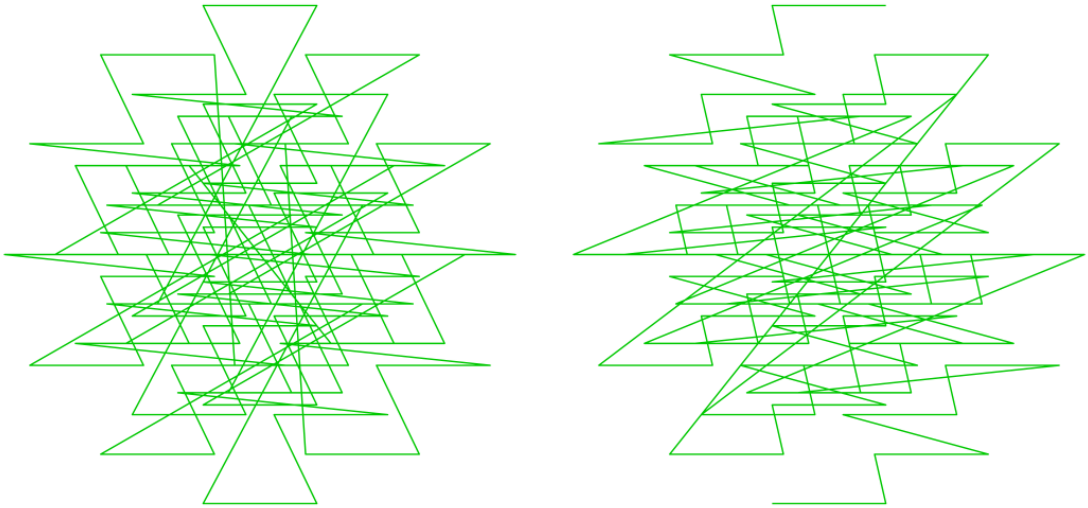

Abb. 6.7: Dimension 7. Stern und Fächer

4.8 Dimension 8

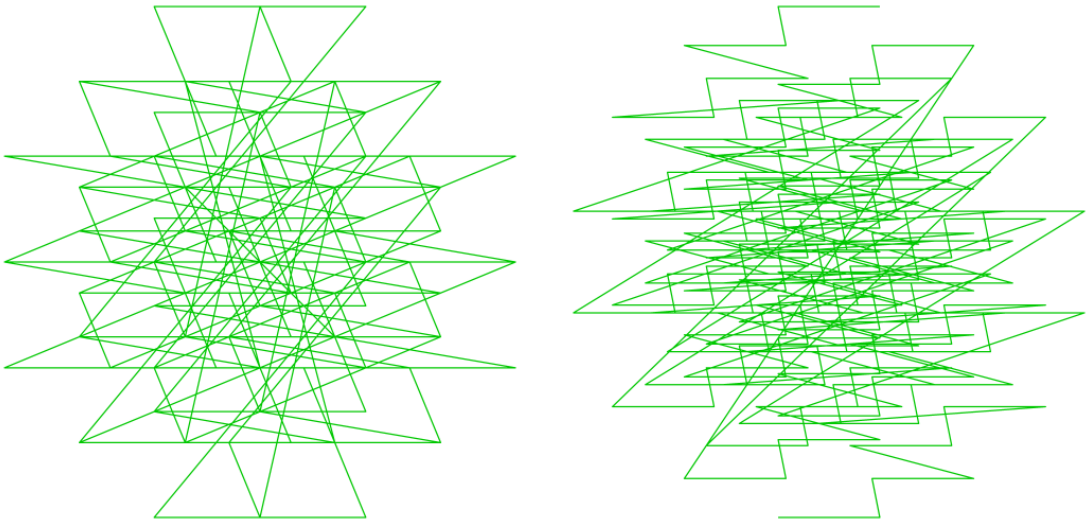

Abb. 6.8: Dimension 8. Stern und Fächer

4.9 Dimension 9

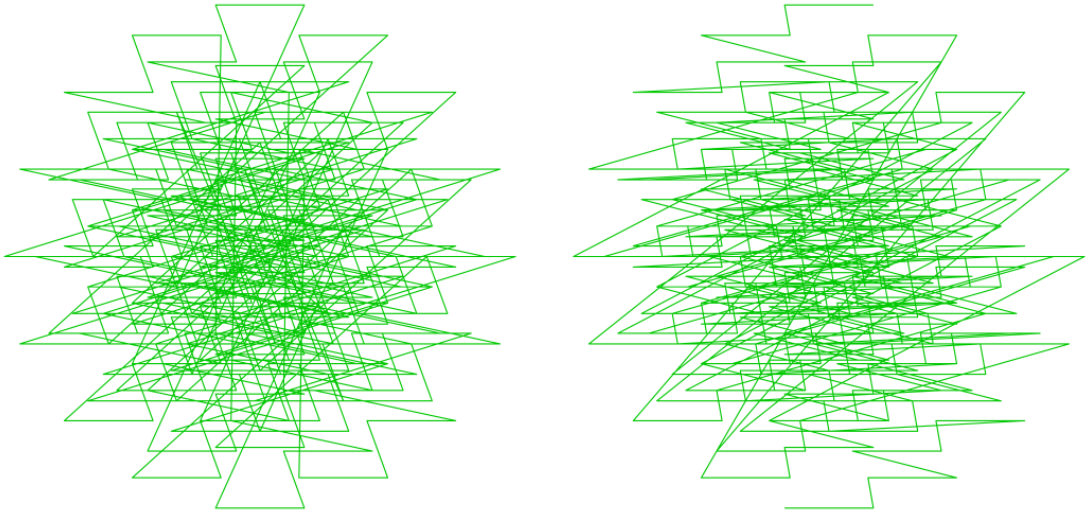

Abb. 6.9: Dimension 9. Stern und Fächer

4.10 Dimension 10

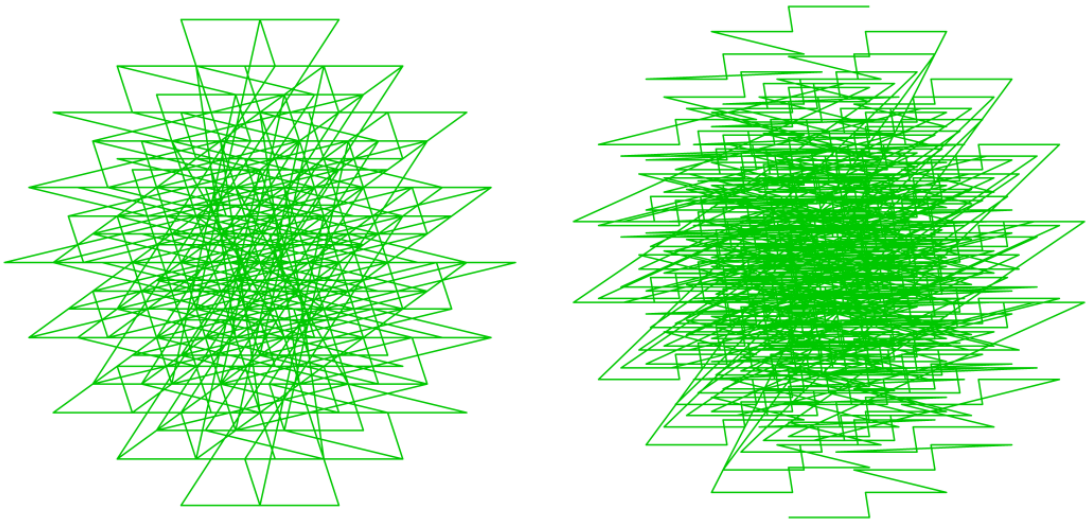

Abb. 6.10: Dimension 10. Stern und Fächer

4.11 Dimension 11

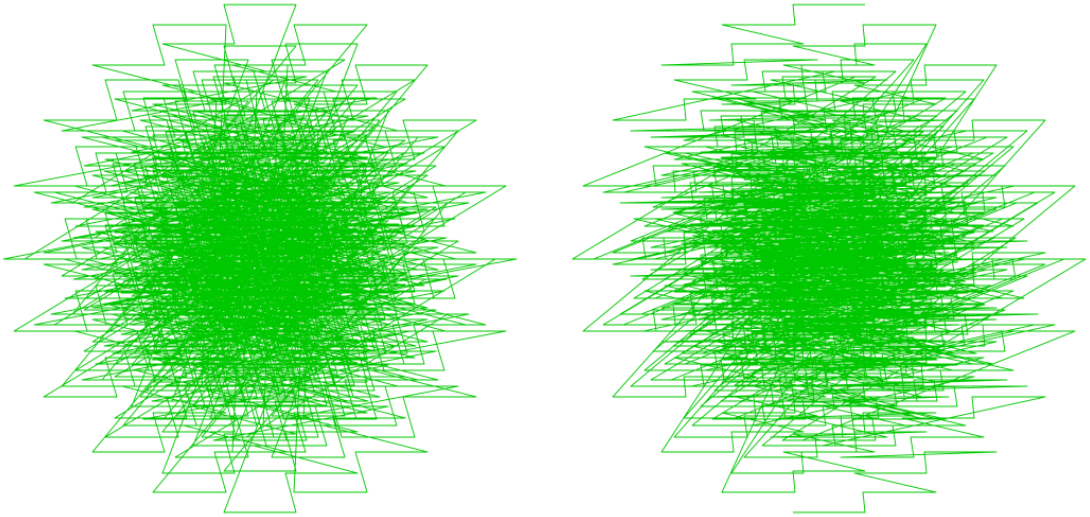

Abb. 6.11: Dimension 11. Stern und Fächer

4.12 Dimension 12

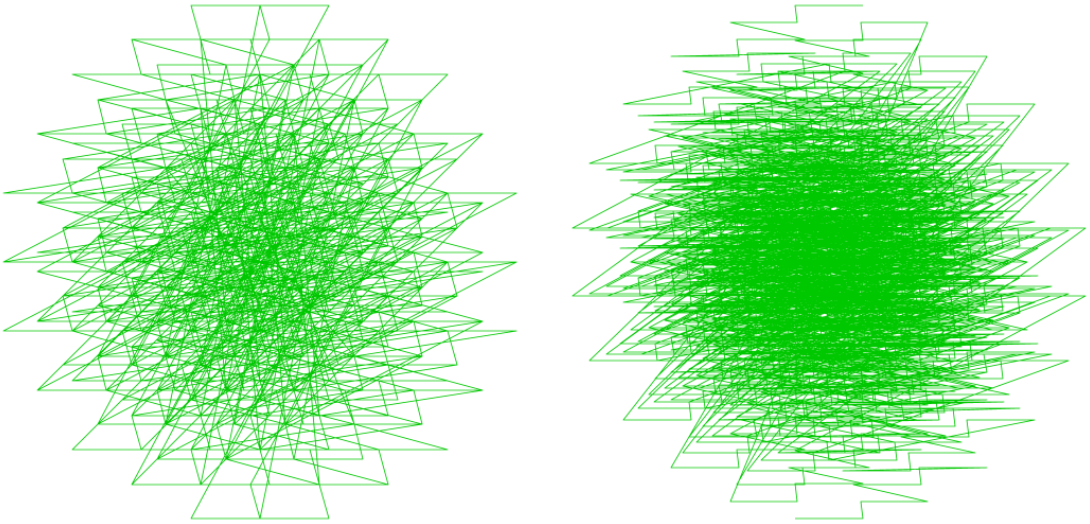

Abb. 6.12: Dimension 12. Stern und Fächer

In der Dimension 12 haben wir $2^{12} = 4096$ Eckpunkte. Daher besteht die grüne Zickzacklinie aus 4095 Teilstrecken.

Bei den Stern-Darstellungen sehen wir ein unterschiedliches Verhalten je nach Parität (ungerade / gerade) der Dimension.

Weblinks

Hans Walser: Hyperwürfel
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Hyperwuerfel4/Hyperwuerfel4.html

Hans Walser: Hyperwürfel
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Hyperwuerfel3/Hyperwuerfel3.html

Hans Walser: Diagonalen im Hyperwürfel
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Diagonalen_im_Hyperwuerfel/Diagonalen_im_Hyperwuerfel.html

Hans Walser: Hyperwürfel
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Hyperwuerfel2/Hyperwuerfel2.htm

Hans Walser: Hypercubus
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Hyperwuerfel/Hyperwuerfel.pdf

Hans Walser: Kollineare Punkte
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kollineare_Punkte6/Kollineare_Punkte6.html