

Hans Walser, [20210312]

## Eckige archimedische Spirale

Bearbeitung und Adaptation der [Aufgabe 56-667](#) von Thomas Jahre

### 1 Worum geht es?

Beispiel einer einfachen eckigen archimedischen Spirale.

### 2 Konstruktion der Spirale

Die eckige Spirale (Abb. 1) wird definiert durch die Punkte:

$$A_n = \left( n \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right), n \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right) \right), \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1)$$

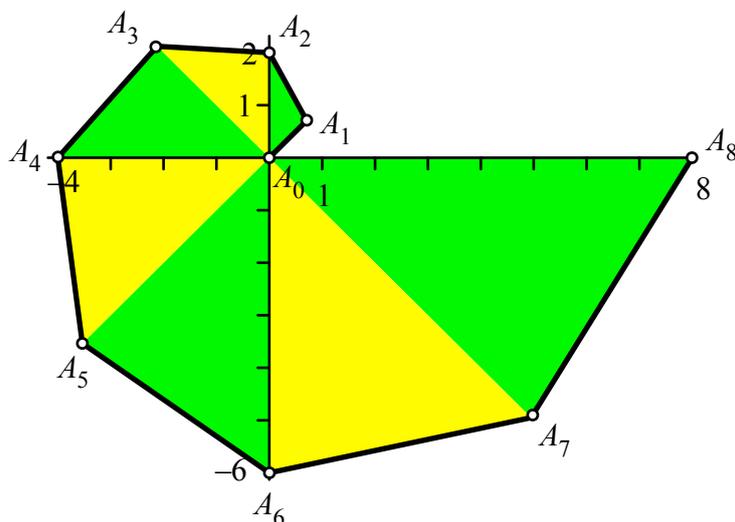
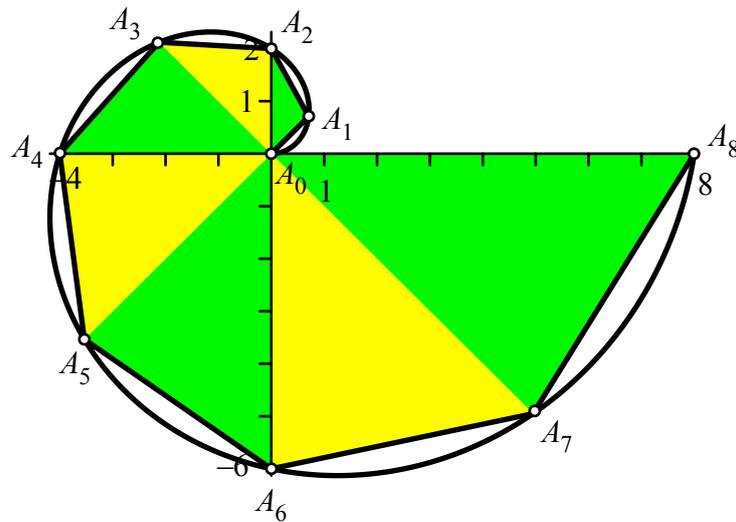


Abb. 1: Die eckige Spirale

### 3 Zugehörige archimedische Spirale

Die Eckpunkte liegen auf der archimedischen Spirale (Abb. 2):

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \cos\left(t \frac{\pi}{4}\right) \\ t \sin\left(t \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$



**Abb. 2: Archimedische Spirale**

#### 4 Längenberechnung

Für die Länge  $s_n$  der Strecke von  $A_{n-1}$  nach  $A_n$  erhalten wir mit dem Kosinussatz:

$$s_n = \sqrt{2n^2 - 2n + 1 - n(n-1)\sqrt{2}} \quad (3)$$

Für die Gesamtlänge  $g_n$  von  $A_0$  bis  $A_n$  entsprechend:

$$g_n = \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{2k^2 - 2k + 1 - k(k-1)\sqrt{2}} \quad (4)$$

Ich habe keine geschlossene Formel dafür gefunden.

Die Tabelle 1 gibt die ersten numerischen Werte.

$n$	Gesamtlänge
1	1
2	2.473625758
3	4.598412482
4	7.432038649
5	10.99795070
6	15.30765987
7	20.36760358
8	26.18172780

**Tab.1 : Gesamtlängen**

## 5 Flächenberechnung

Für den Flächeninhalt  $F_n$  des Dreiecks  $A_0A_{n-1}A_n$  berechnen wir:

$$F_n = \frac{1}{2}(n-1)n \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \binom{n}{2} \quad (5)$$

Daraus ergibt sich für die Gesamtfläche  $G_n$ :

$$G_n = \sum_{k=2}^n F_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \binom{n+1}{3} \quad (6)$$

Die Tabelle 2 gibt die ersten numerischen Werte.

$n$	Gesamtfläche
2	.7071067810
3	2.828427124
4	7.071067810
5	14.14213562
6	24.74873734
7	39.59797974
8	59.39696960

**Tab. 2: Gesamtflächen**

## 6 Bildergalerie

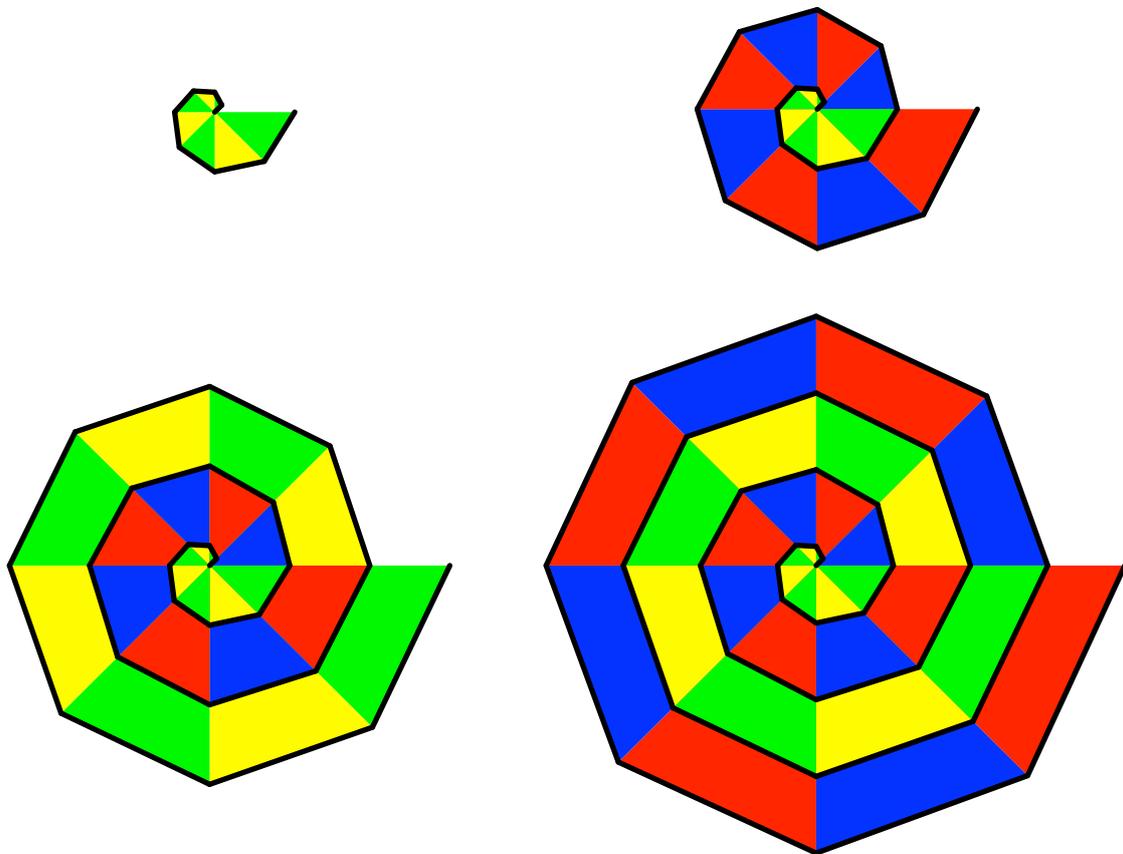


Abb. 3: Bildergalerie

### Website

Thomas Jahre

<https://www.schulmodell.eu/images/stories/mathe/wochenaufgabe/667.jpg>