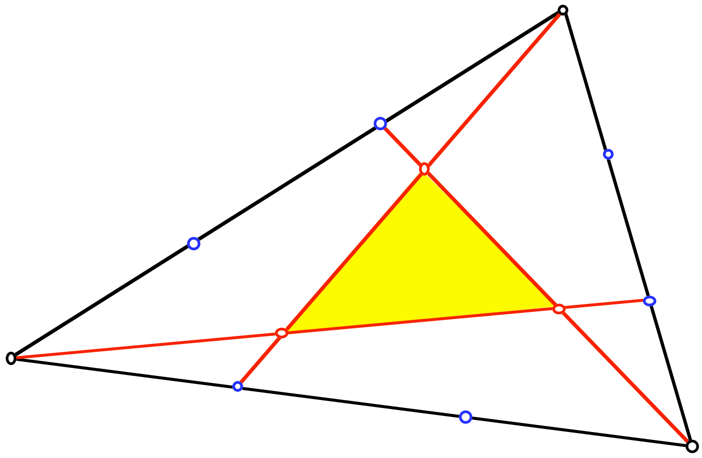
Hans Walser, [20080214b]

Ecktransversalen im Dreieck

1 Eingangsbeispiel

In einem Dreieck werden alle drei Seiten gedrittelt und dann die Ecktransversalen gemäß Figur eingezeichnet.



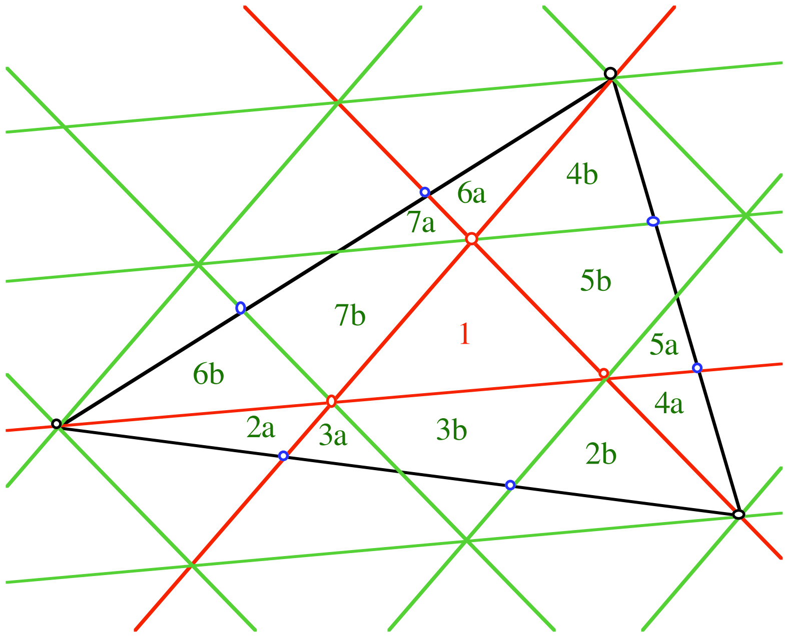
Ecktransversalen

Dann entsteht in der Mitte ein Dreieck, dessen Fläche $\frac{1}{7}$ der großen Dreiecksfläche ist.

Das Problem soll zum ersten Mal 1912 in St. Petersburg in einer Prüfung gestellt worden sein (vgl. [Alexanderson/Ross 2007], S. 279).

2 Lösung im Dreiecksraster

Wir betten das kleine Dreieck in einen Dreiecksraster ein.

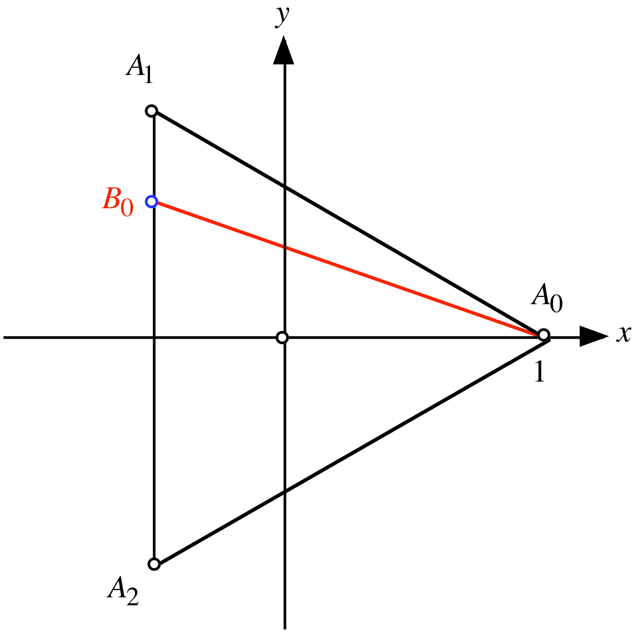


Dreiecksraster

Dann sehen wir, dass das große Dreieck genau 7 kleine Dreiecke enthält. Aus Symmetriegründen können wir nämlich die Teile na und nb, $n \in \{2,3,4,5,6,7\}$, jeweils zu einem kleinen Dreieck zusammenfügen.

3 Rechnerische Lösung und Verallgemeinerung

Das Problem ist affin invariant, wir können uns also auf ein reguläres Dreieck in der angegebenen Disposition beschränken.



Standardisierte Version

Das Dreieck hat die Eckpunktskoordinaten $A_0(1,0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Wir führen nun ein allgemeines Teilverhältnis $\lambda = \frac{\overline{A_1B_0}}{\overline{A_1A_2}}$ ein. Im Eingangsbeispiel war $\lambda = \frac{1}{3}$.

Die Idee ist nun folgende: Das kleine Dreieck ist wiederum ein reguläres, der Abstand der Transversale A_0B_0 ist der Inkreisradius dieses Dreiecks. Damit sind die Flächenverhältnisse berechenbar.

Die Transversale A_0B_0 hat die Gleichung:

$$y = \frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}x - \frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}$$

und damit die Hessesche Normalform:

$$\frac{(2\lambda-1)x-\sqrt{3}y-(2\lambda-1)}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}} = 0$$

Für den Abstand vom Ursprung und damit für den Inkreisradius $\rho(\lambda)$ des kleinen Dreieckes erhalten wir daraus:

$$\rho(\lambda)=\frac{-(2\lambda-1)}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$$

Das große Ausgangsdreieck hat den Inkreisradius $\frac{1}{2}$; das Radienverhältnis ist also:

$$\frac{-(2\lambda-1)}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$$

und das Flächenverhältnis $\Phi(\lambda)$ das Quadrat davon:

$$\Phi(\lambda)=\frac{4\lambda^2-4\lambda+1}{\lambda^2-\lambda+1}$$

Beispiele:

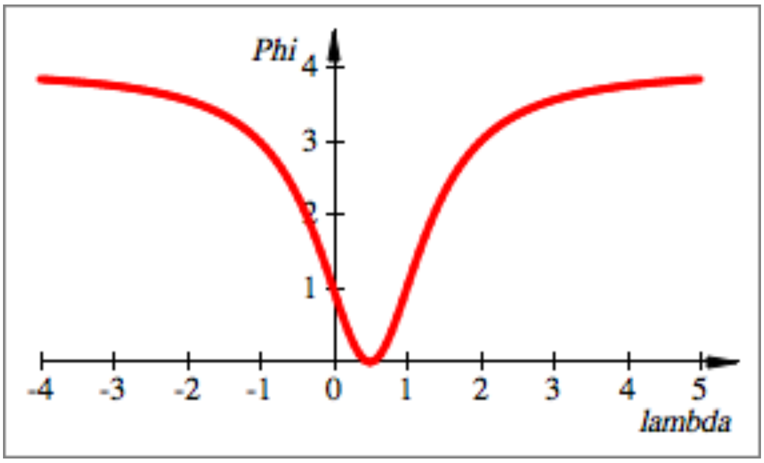
λ	$\Phi(\lambda)$
0	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{13}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{2}$	0
1	1

Weiter ist:

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\Phi(\lambda)=4$$

Dies ist auch geometrisch klar.

Funktionsgraf:



$$\Phi(\lambda)=\frac{4\lambda^2-4\lambda+1}{\lambda^2-\lambda+1}$$

Literatur:

[Alexanderson/Ross 2007] Alexanderson, Gerald L. and Peter Ross: *The Harmony of the World.* 75 Years of *Mathematics Magazine*. The Mathematical Association of America. 2007. ISBN 978-0-88385-560-7