Hans Walser, [20180701]

Ergänzung zum Rechteck

1 Worum geht es?

Spiel mit Tangenten und Rechtecken bei Kegelschnitten. Als Sonderfall erscheint das Rechteck im DIN-Format.

2 Parabel

Wir beginnen mit der Parabel (Abb. 1):

$$p: \quad y = \tfrac{1}{4}x^2 \tag{1}$$

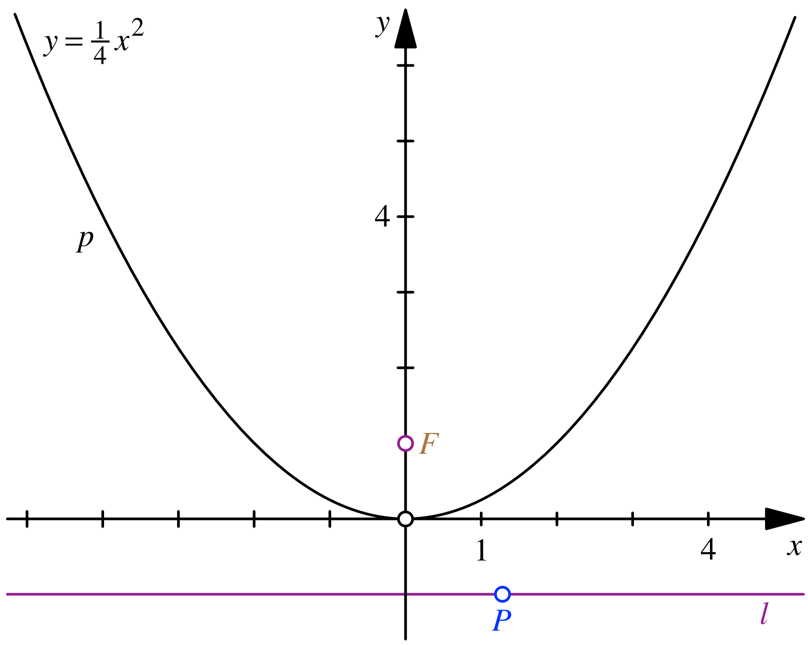

Abb. 1: Parabel mit Brennpunkt und Leitlinie

Die Parabel p hat den Brennpunkt $F(0,1)$ und die Leitlinie $l: \quad y=-1$. Auf der Leitlinie l wählen wir einen Punkt P.

2.1 Tangenten und Rechteck

Die Tangenten von P an die Parabel p sind orthogonal (Abb. 2). Die Berührungspunkte bezeichnen wir mit B_1 und B_2.

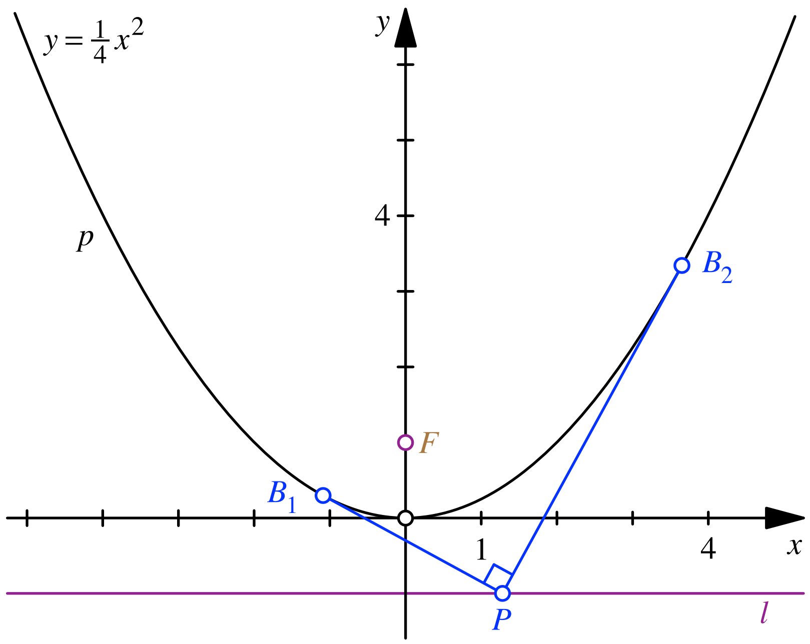

Abb. 2: Tangenten

Wir ergänzen das rechtwinklige Dreieck B_2B_1P zum Rechteck B_2SB_1P (Abb. 3).

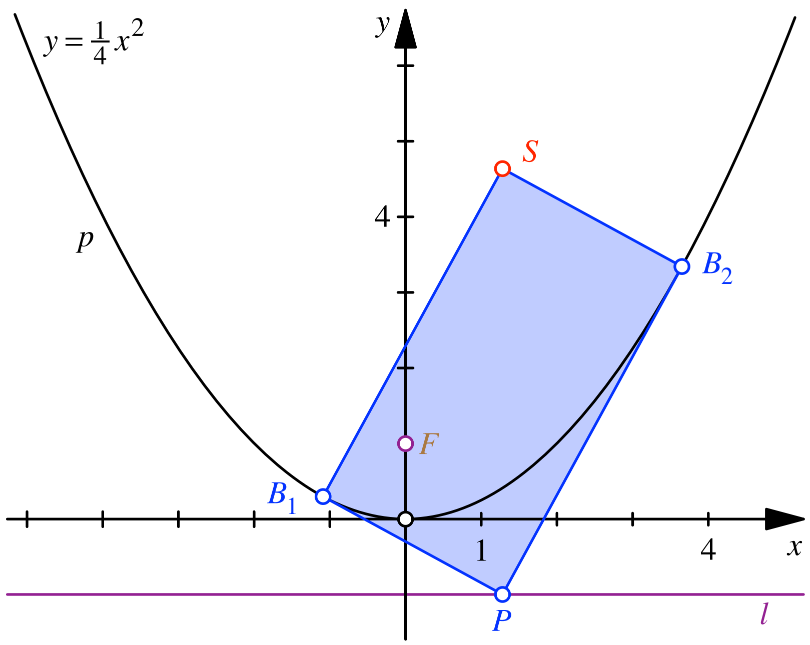

Abb. 3: Ergänzung zum Rechteck

Die Frage ist nun, welche Kurve der Punkt S beschreibt, wenn P auf l variiert.
Wir erhalten wieder eine Parabel (Abb. 4).

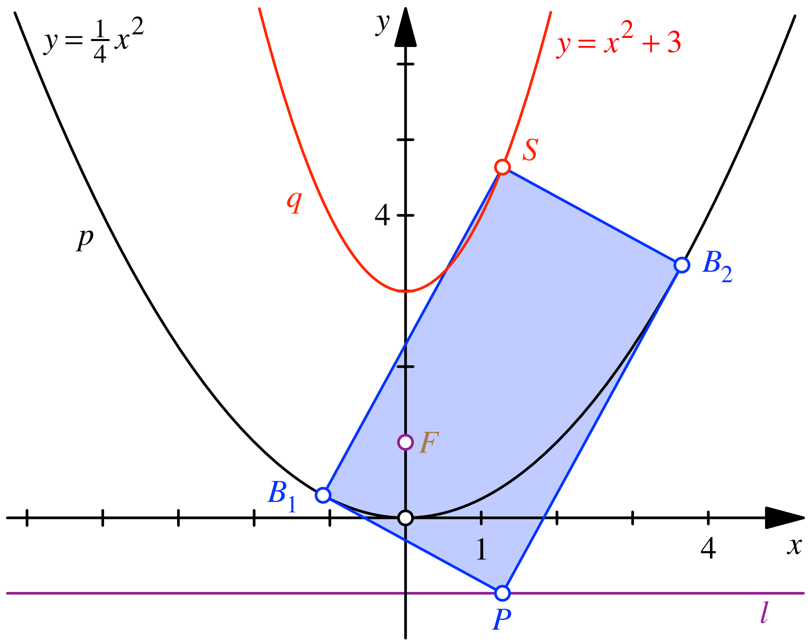

Abb. 4: Zweite Parabel

Diese Parabel hat die Gleichung:

$$q: \quad y = x^2 + 3 \tag{2}$$

Dies kann durch Rechnung nachgewiesen werden.

2.2 Scheitelkrümmungskreise

Die Scheitelkrümmungskreise der beiden Parabeln haben den Punkt $Z(0,4)$ gemeinsam (Abb. 5). Wir können die Parabel q durch eine Streckung mit dem Zentrum Z und dem Faktor 4 auf die Parabel p abbilden.

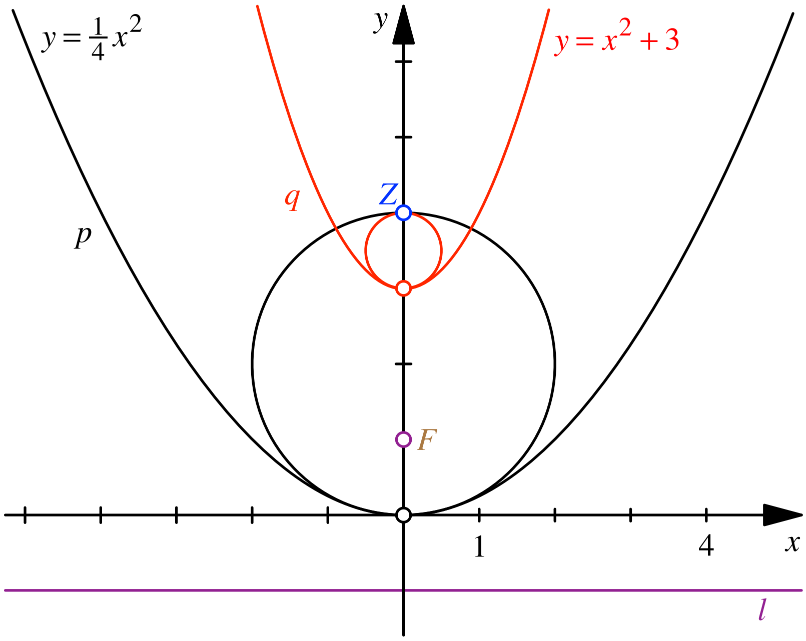

Abb. 5: Krümmungskreise in den Scheiteln

2.3 Sonderfälle

Im symmetrischen Fall ist das Rechteck ein auf der Spitze stehendes Quadrat (Abb. 6). Der Brennpunkt F ist das Zentrum des Quadrates.

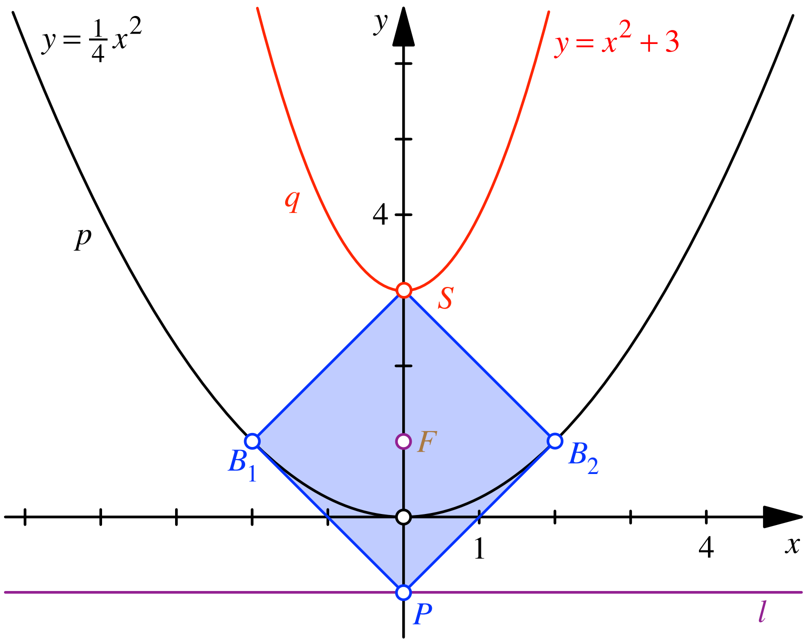

Abb. 6: Sonderfall Quadrat

Die Abbildung 7 zeigt einen interessanten Sonderfall: Die Rechteckseiten sind nicht nur tangential oder normal zur Parabel p sondern auch zur Parabel q.

Die Oberkante B_2S liegt auf einer Geraden durch Z. Das Rechteck hat das Seitenverhältnis $\sqrt{2}:1$, entspricht also dem DIN-Format (Walser 2013).

Die Strecke B_2S ist eine der beiden Minimaltransversalen (die andere liegt symmetrisch dazu) der beiden Parabeln. Sie hat die Länge:

$$\overline{B_2S} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.598 \tag{3}$$

Eine Kreisscheibe mit dem Durchmesser dieser Strecke B_2S ist die größte Kreisscheibe, die zwischen den beiden Parabeln durchgeschoben werden kann.

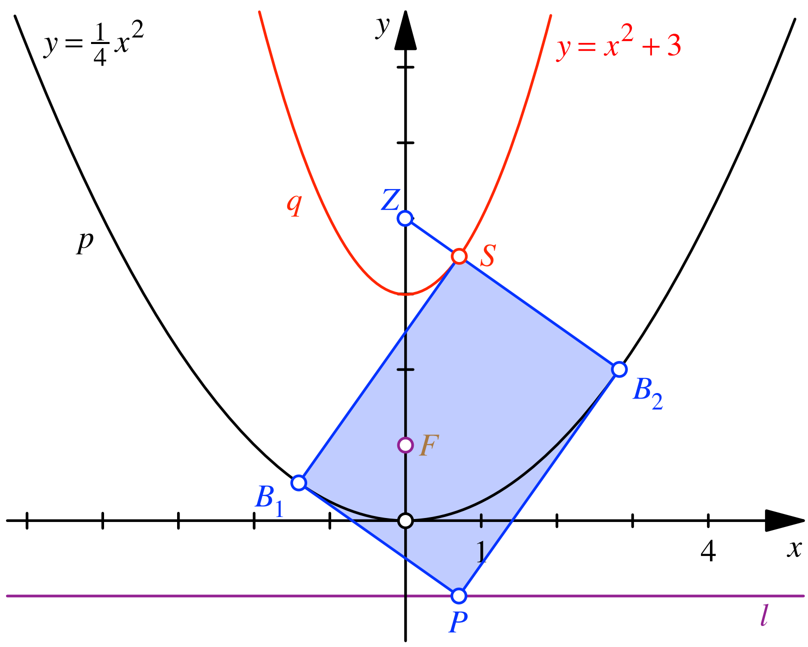

Abb. 7: DIN-Format

Die Figur kann iteriert werden (Abb. 8).

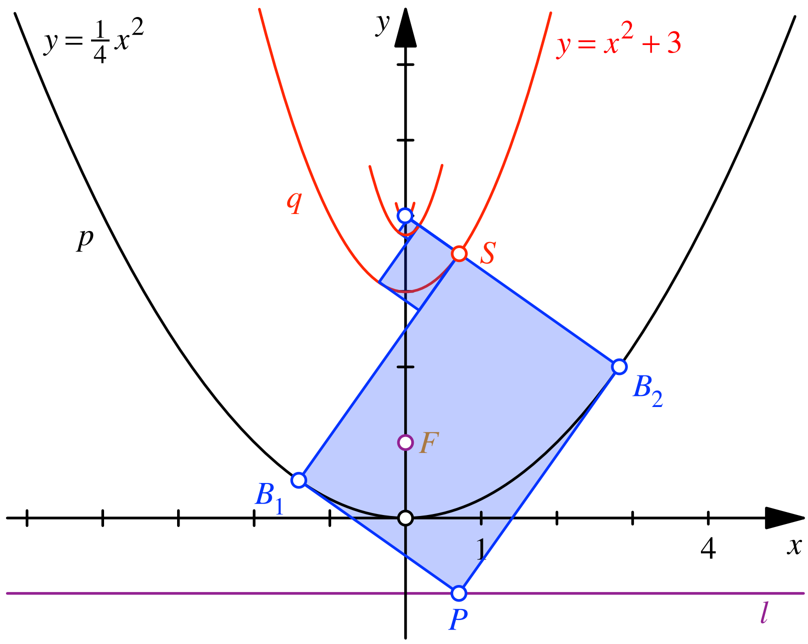

Abb. 8: Iteration

3 Ellipse

Die Punkte, von denen aus eine Ellipse (oder eine Hyperbel) unter einem rechten Winkel gesehen wird, bilden einen Kreis („Thaleskreis“, [1]). Bei einer Ellipse mit den Halbachsen a und b hat der Kreis den Radius r:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

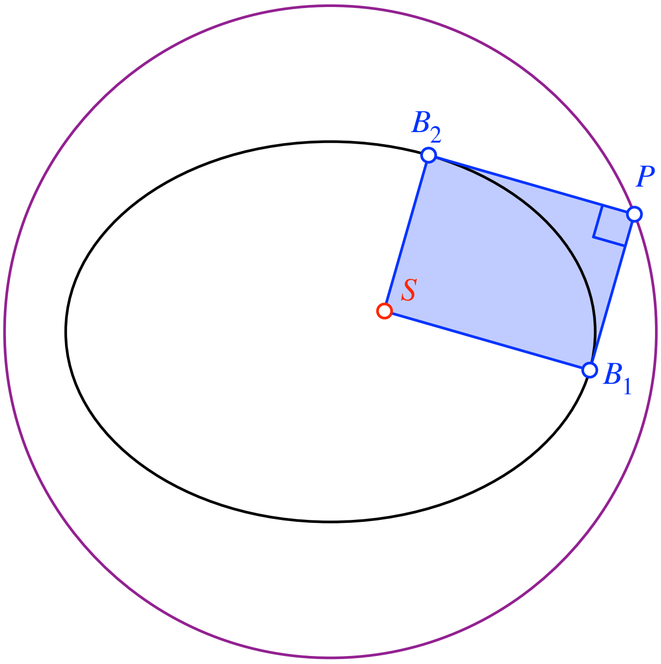

Abb. 9: Thaleskreis an die Ellipse

Die ergänzende Ecke S zeichnet eine Rosette (Abb. 10).

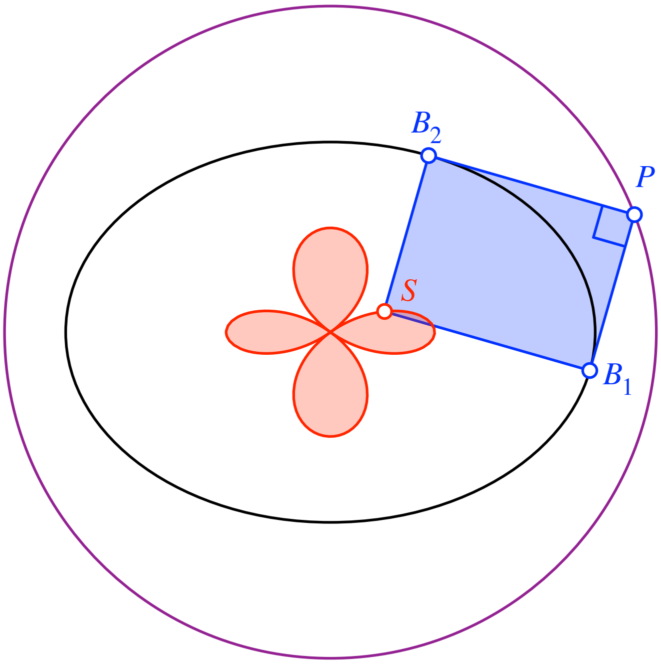

Abb. 10: Rosette

4 Hyperbel

Wir haben einen Thaleskreis (Abb. 11) mit dem Radius r

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{5}$$

Es muss also $a \geq b$ sein, damit man rechtwinklige Tangenten an die Hyperbel zeichnen kann.

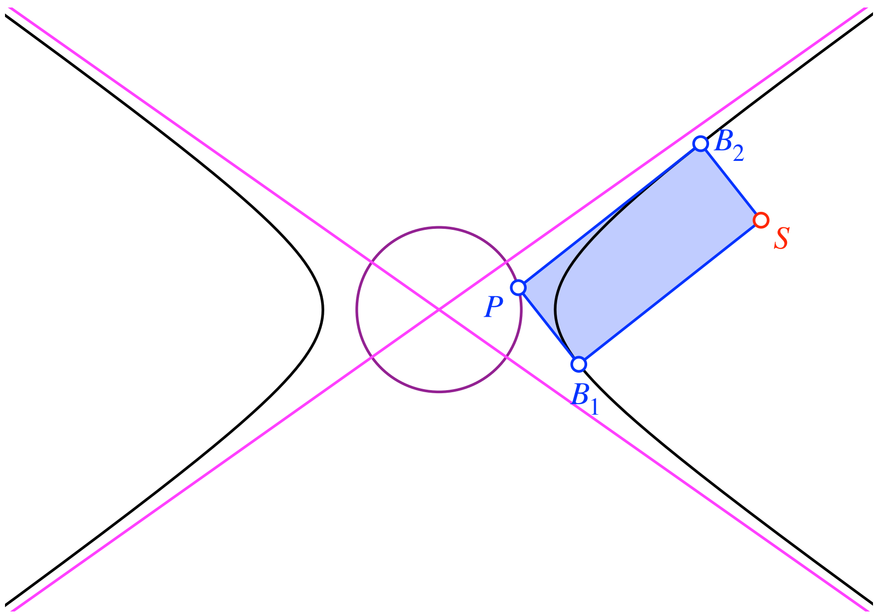

Abb. 11: Thaleskreis der Hyperbel

Der ergänzende Punkt S beschreibt eine aus vier Ästen bestehende Kurve (Abb. 12).

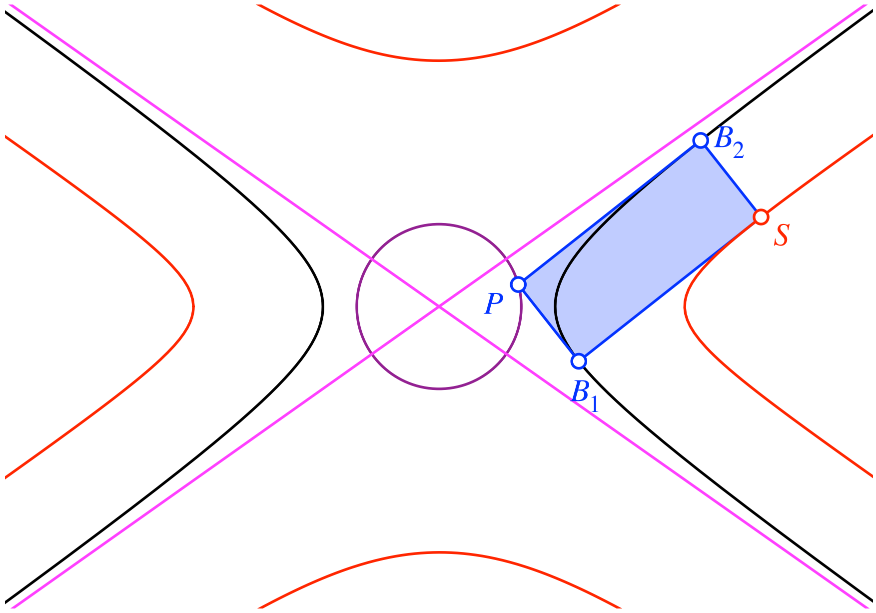

Abb. 12: Vierteilige Kurve

Websites

Hans Walser: Tangenten an Ellipse und Hyperbel (abgerufen 02.07.2018):
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/T/Tangenten_E_H/Tangenten_E_H

Literaturverzeichnis

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.