

Hans Walser, [20150815]

## Fibonacci-erzeugende Funktion

Anregung: (Hong, 2015)

### 1 Worum geht es?

Wir arbeiten mit der verallgemeinerten Fibonacci-Folge  $a_n$  mit den Startwerten  $a_0$  und  $a_1$  und der Rekursion:

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} \quad (1)$$

Wir suchen nun eine erzeugende Funktion, also eine (formale) Potenzreihe von der Form:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

### 2 Folgenglieder

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Folgenglieder.

$n$	$a_n$
0	$a_0$ Startwert
1	$a_1$ Startwert
2	$a_2 = pa_1 + qa_0$
3	$a_3 = p^2a_1 + pqa_0 + qa_1$
4	$a_4 = p^3a_1 + p^2qa_0 + 2pqa_1 + q^2a_0$
5	$a_5 = p^4a_1 + p^3qa_0 + 3p^2qa_1 + 2pq^2a_0 + q^2a_1$

**Tab. 1: Folgenglieder**

Für  $p = q = 1$  und die Startwerte  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ergibt sich die gewöhnliche Fibonacci-Folge.

### 3 Erzeugende Funktion

Die Funktion

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0 p)x}{1 - px - qx^2} \quad (3)$$

leistet das Gewünschte, wie durch Rückrechnen eingesehen werden kann. Zu zeigen ist:

$$a_0 + (a_1 - a_0 p)x = (1 - px - qx^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \quad (4)$$

Für das Produkt auf der rechten Seite von (4) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (1 - px - qx^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) = \\ & = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ -a_0 px - a_1 px^2 - a_2 px^3 - a_3 px^4 - \dots \\ -a_0 qx^2 - a_1 qx^3 - a_2 qx^4 - a_3 qx^5 - \dots \end{cases} \quad (5) \\ & = a_0 + (a_1 - a_0 p)x + \underbrace{(a_2 - a_1 p - a_0 q)}_{=0} x^2 + \underbrace{(a_3 - a_2 p - a_1 q)}_{=0} x^3 + \dots \\ & = a_0 + (a_1 - a_0 p)x \end{aligned}$$

Wegen der Rekursion (1) verschwinden die Koeffizienten für  $x^2$  und höhere Potenzen von  $x$ . Damit sind (4) und (3) bewiesen.

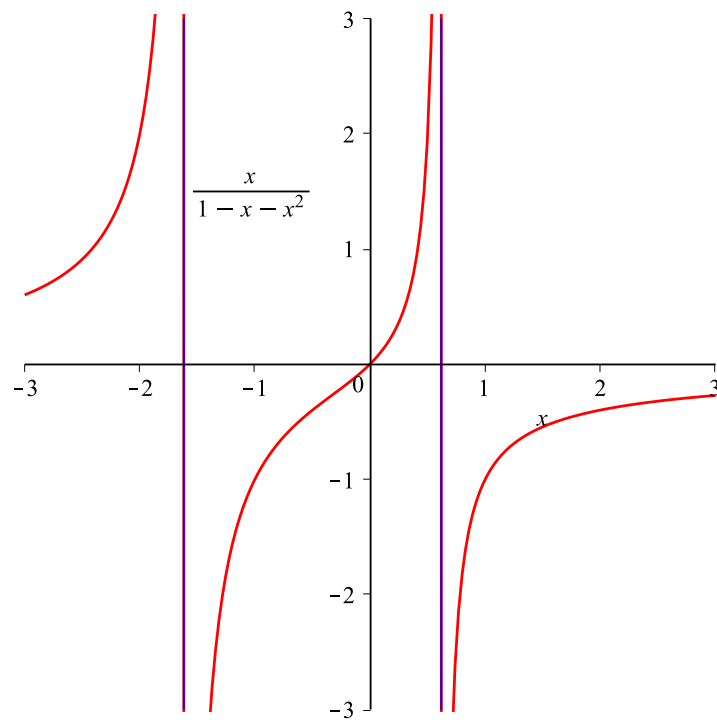
### 3.1 Beispiele

#### 3.1.1 Fibonacci

Für  $p = q = 1$  und die Startwerte  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ergibt sich:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + \dots \quad (6)$$

Die Abbildung 1 zeigt den Grafen dieser Funktion.

**Abb. 1: Funktionsgraf****3.1.2  $p = 2$** 

Für  $p = 2, q = 1$  und die Startwerte  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ergibt sich:

$$f(x) = \frac{x}{1-2x-x^2} = x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 29x^5 + 70x^6 + 169x^7 + 408x^8 + \dots \quad (7)$$

Die Abbildung 2 zeigt den Grafen dieser Funktion.

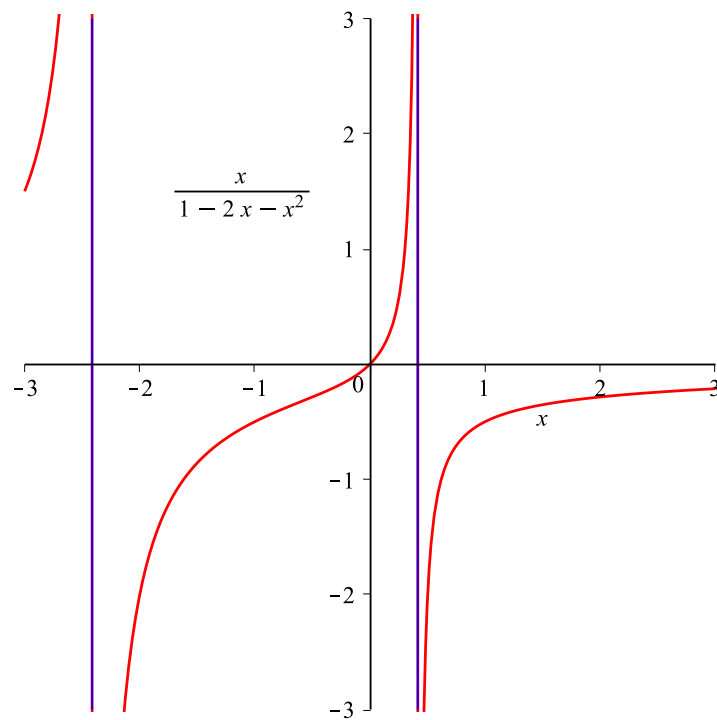


Abb. 2: Funktionsgraf

#### 4 Quotientenfolge

Wir bilden nun die Quotientenfolge:

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (8)$$

Nebenbemerkung: Es ist (nicht mit der schulischen  $p$ - $q$ -Formel verwechseln):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2q} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} b_n = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2q} \quad (10)$$

Man kann sich überlegen, was die zweite Formel von (10) bedeutet.

Weiter sei nun:

$$c_n = f(b_n) \quad (11)$$

## 4.1 Beispiele

### 4.1.1 Fibonacci

Für  $p = q = 1$  und die Startwerte  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 2.

$n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$
0	0	0	0
1	1	1	-1
2	1	$\frac{1}{2}$	2
3	2	$\frac{2}{3}$	-6
4	3	$\frac{3}{5}$	15
5	5	$\frac{5}{8}$	-40

**Tab. 2: Fibonacci**

### 4.1.2 $p = 2$

Für  $p = 2, q = 1$  und die Startwerte  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 3.

$n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$
0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	-2
2	2	$\frac{2}{5}$	10
3	5	$\frac{5}{12}$	-60
4	12	$\frac{12}{29}$	348
5	29	$\frac{29}{70}$	-2030

**Tab. 3**

### 4.1.3 $q = 2$

Für  $p = 1, q = 2$  und die Startwerte  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 4. Die Werte der Folge  $c_n$  sind nicht mehr ganzzahlig. Der Einfluss von  $q = 2$  ist offensichtlich.

$n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$
0	0	0	0
1	1	1	$-\frac{1}{2}$
2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{15}{8}$
4	5	$\frac{5}{11}$	$\frac{55}{16}$
5	11	$\frac{11}{21}$	$-\frac{231}{32}$

Tab. 4

## 5 Tribonacci

Die Folge  $c_n$  genügt folgender Rekursion:

$$c_n = -\frac{p^2+q}{q}c_{n-1} + \frac{p^2+q}{q}c_{n-2} + c_{n-3} \quad (12)$$

Wir haben eine so genannte Tribonacci-Folge.

Beweis fehlt, experimentell erhärtet.

Die Startwerte  $a_0$  und  $a_1$  der ursprünglichen Folge haben keinen Einfluss auf die Rekursion (12). Hingegen hängen die Startwerte der Folge  $c_n$  von den Startwerten der ursprünglichen Folge ab:

$$c_0 = f(b_0) = f\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad c_1 = f(b_1) = f\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \quad c_2 = f(b_2) = f\left(\frac{a_2}{a_3}\right) \quad (13)$$

Für  $q = 1$  und ganzzahlige Startwerte sowie ganzzahliges  $p$  sind die Werte von  $c_n$  ganzzahlig.

Die Folge  $c_n$  hat mit der Schreibweise

$$r = -\frac{p^2+q}{q}, \quad s = \frac{p^2+q}{q}, \quad t = 1 \quad (14)$$

die erzeugende Funktion:

$$g(x) = \frac{c_0 + (c_1 - rc_0)x + (c_2 - rc_1 - sc_0)x^2}{1 - rx - sx^2 - tx^3} \quad (15)$$

### Literatur

Hong, Dae S. (2015): When is the Generating Function of the Fibonacci Numbers an Integer? *The College Mathematics Journal*. Vol. 46, No. 2, March 2015, 110-112.