Hans Walser, [20141023]

Fibonacci-Intervalle

0 Worum geht es?

Es werden zwei Beispiele von Algorithmen angegeben, welche zu den Fibonacci-Zahlen und zum Goldenen Schnitt führen.

1 Brüche

1.1 Startintervall

Wir beginnen mit dem offenen Intervall $(0,1)=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right)$.

1.2 Nenner 2

In diesem offenen Intervall $\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right)$ ist $\frac{1}{2}$ der einzige Bruch mit dem Nenner 2.

Nun verkleinern wir das Intervall auf $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right)$.

1.3 Nenner 3

In diesem offenen Intervall ist $\frac{2}{3}$ der einzige Bruch mit dem Nenner 3. Der Bruch $\frac{1}{3}$ ist zu klein.

Nun verkleinern wir das Intervall auf $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

1.4 Nenner 4

Dieses offene Intervall enthält keinen Bruch mit dem Nenner 4. Der Bruch $\frac{2}{4}$ ist gerade noch zu klein, der Bruch $\frac{3}{4}$ zu groß.

1.5 Nenner 5

Hingegen enthält das Intervall den Bruch $\frac{3}{5}$ als einzigen Bruch mit dem Nenner 5.

Nun verkleinern wir das Intervall auf $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{3}\right)$. Wir nehmen den „neuen“ Bruch als die eine und den neuen Bruch des vorangegangenen Schrittes als die andere Grenze.

1.6 Nenner 6

Wegen $\frac{3}{6}<\frac{3}{5}$ einerseits und $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ enthält dieses Intervall keinen Bruch mit dem Nenner 6.

1.7 Nenner 7

Wegen $\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{3}<\frac{5}{7}$ enthält dieses Intervall auch keinen Bruch mit dem Nenner 7.

1.8 Nenner 8

Bei Brüchen mit dem Nenner 8 werden wir wieder fündig. Es ist $\frac{4}{8}<\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3}<\frac{6}{8}$. Damit ist $\frac{5}{8}$ der einzige Bruch mit Nenner 8 im Intervall.

Nun verkleinern wir das Intervall auf $\left(\frac{3}{5},\frac{5}{8}\right)$.

1.9 Nenner 9

Wegen $\frac{5}{9}<\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}<\frac{6}{9}$ enthält das Intervall keinen Bruch mit dem Nenner 9.

1.10 Nenner 10

Wegen $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}<\frac{7}{10}$ enthält das Intervall keinen Bruch mit dem Nenner 10.

1.11 Nenner 11

Wegen $\frac{6}{11}<\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}<\frac{7}{11}$ enthält das Intervall keinen Bruch mit dem Nenner 11.

1.12 Nenner 12

Wegen $\frac{7}{12}<\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}<\frac{8}{12}$ enthält das Intervall keinen Bruch mit dem Nenner 12.

1.13 Nenner 13

Bei Brüchen mit dem Nenner 13 werden wir wieder fündig. Es ist $\frac{7}{13}<\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}<\frac{8}{13}<\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{8}<\frac{9}{13}$. Damit ist $\frac{8}{13}$ der einzige Bruch mit Nenner 13 im Intervall.

Nun verkleinern wir das Intervall auf $\left(\frac{8}{13},\frac{5}{8}\right)$.

1.14 Und so weiter

Offenbar werden wir genau bei Brüchen fündig, deren Nenner Fibonacci-Zahlen sind. Und zu jeder Fibonacci-Zahl gibt es nur einen passenden Bruch mit diesem Nenner. Sein Zähler ist die vorangegangene Fibonacci-Zahl.

1.15 Brute Force

Mit dem Programm

```
N:=1000: # Obergrenze
a:=1:
b:=1/2:
print(a);
print(b);
for n from 3 to N do
 for k from 1 to n do
  if (a < k/n and k/n < b) or (b < k/n and k/n < a) then
   a:=b: b:=k/n:
   print(k/n);
  end:
 end:
end:
```

erhalten wir die Ausgabe:

$$1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{8}{13}$$

$$\frac{13}{21}$$

$$\frac{21}{34}$$

$$\frac{34}{55}$$

$$\frac{55}{89}$$

$$\frac{89}{144}$$

$$\frac{144}{233}$$

$$\frac{233}{377}$$

$$\frac{377}{610}$$

$$\frac{610}{987}$$

Tab. 1: Fibonacci-Zahlen in Brüchen

Unsere Vermutung wird bestätigt. Beweis? — Der knifflige Punkt ist, zu zeigen, dass andere Zahlen als die Fibonacci-Zahlen nicht in die Kränze kommen.

Der Grenzwert der Brüche der Tabelle 1 ist der Goldene Schnitt $\frac{1}{\Phi} \approx 0.618$.

2 Im Quadratraster

Wir arbeiten im ersten Quadraten eines Quadratrasters (Abb. 1).

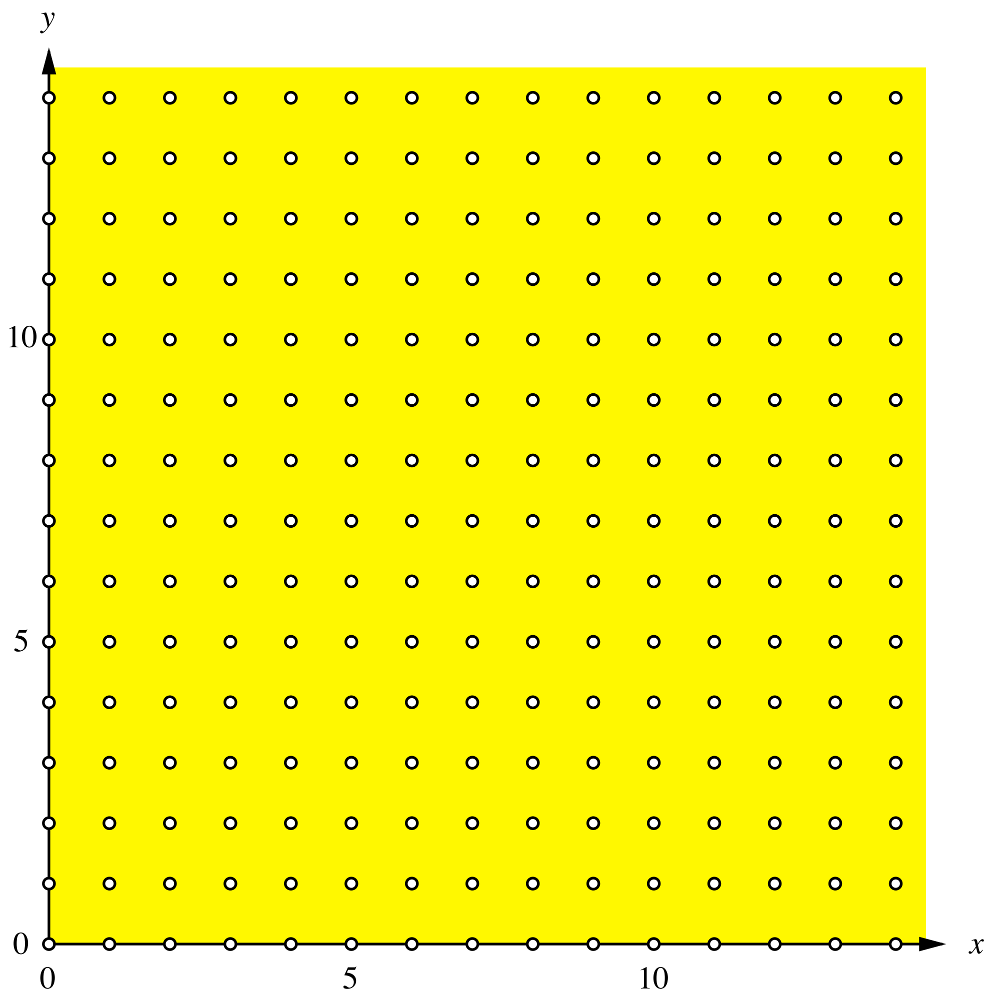

Abb. 1: Im ersten Quadranten

Im Innern dieses Quadranten (also nicht auf dem Rand) wählen wir den zum Ursprung $(0, 0)$ nächsten Punkt. Dies ist der Punkt $(1, 1)$.

Wir legen nun einen Strahl vom Ursprung aus durch diesen Punkt und definieren einen kleineren Sektor gemäß Abbildung 2.

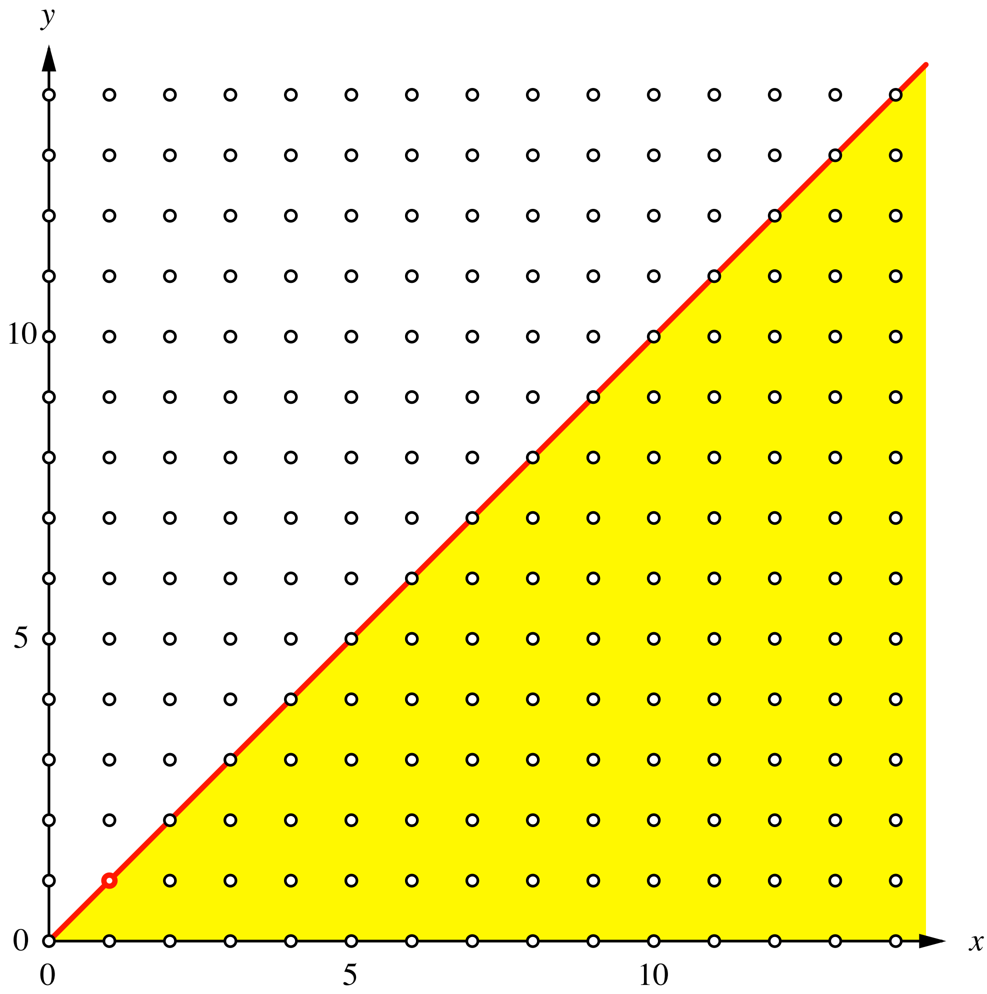

Abb. 2: Verkleinerter Sektor

Im Innern dieses verkleinerten Sektors wählen wir wiederum den zum Ursprung nächsten Punkt. Dies ist der Punkt (2, 1).

Wir legen nun einen Strahl vom Ursprung aus durch diesen Punkt und definieren einen noch kleineren Sektor gemäß Abbildung 3.

Die Sektorgrenzen sind jeweils der neue Strahl und der Strahl vom vorhergegangenen Arbeitsschritt.

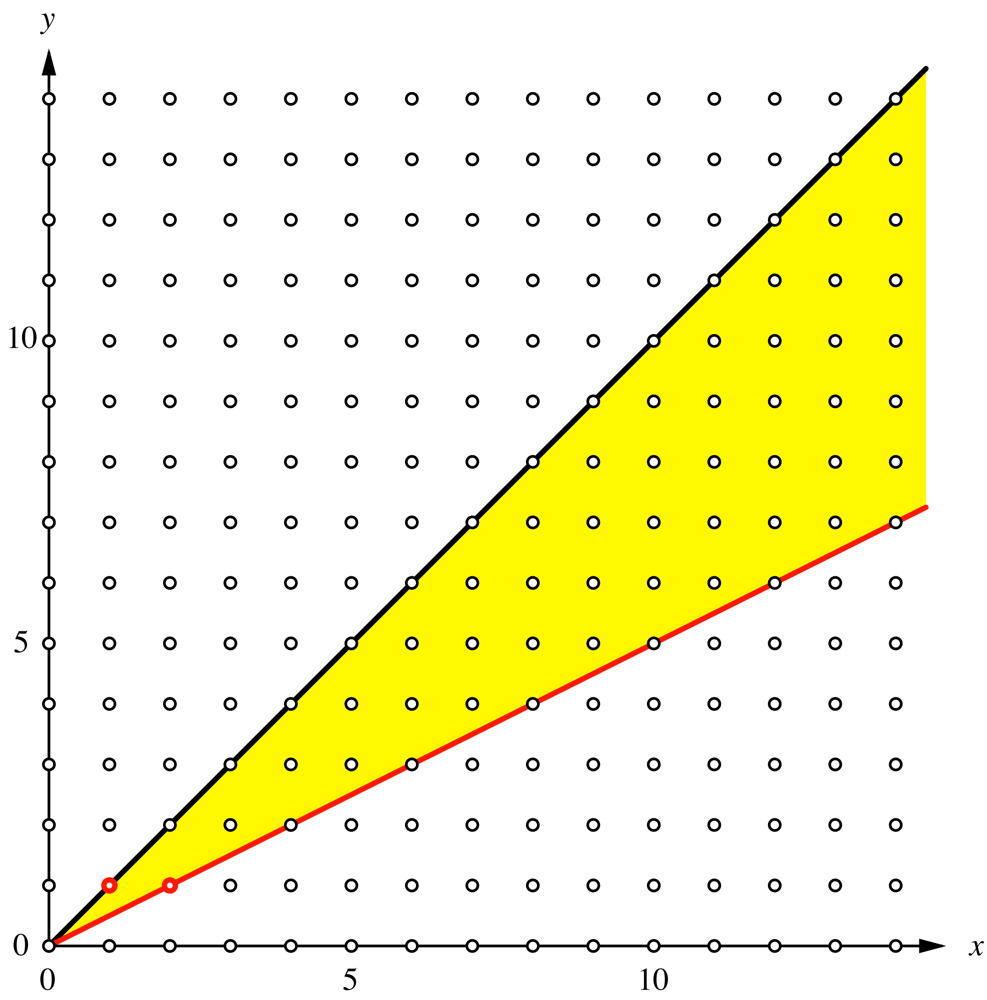

Abb. 3: Erneute Verkleinerung des Sektors

Der zum Ursprung nächste Punkt im Innern dieses Sektors ist $(3, 2)$.

Erneut verkleinern wir den Sektor (Abb. 4).

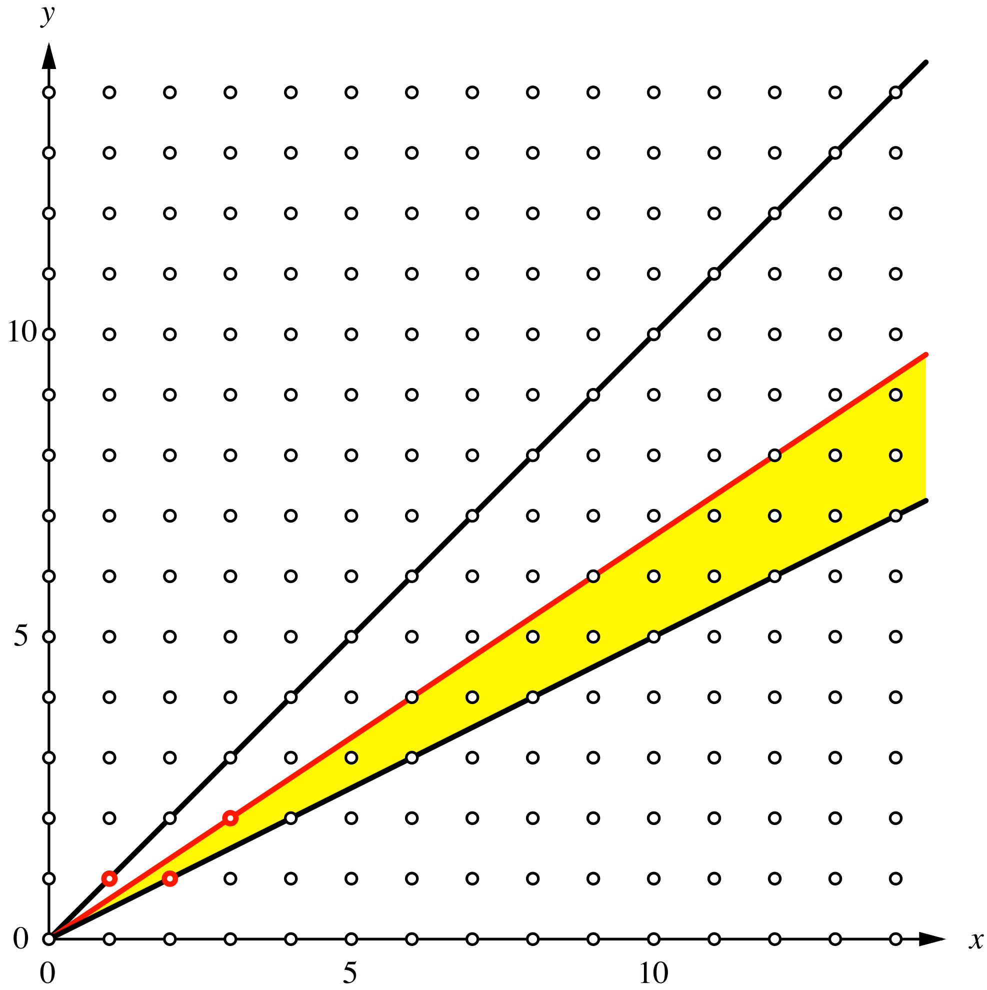

Abb. 4: Weitere Verkleinerung des Sektors

Interessanterweise gibt es nun keinen Punkt mit der x-Koordinate 4 in diesem Sektor. Der Punkt $(4, 2)$ ist auf dem Rand und daher nicht zulässig. Der zum Ursprung nächste Punkt ist $(5, 3)$.

Die Abbildung 5 zeigt den folgenden Schritt.

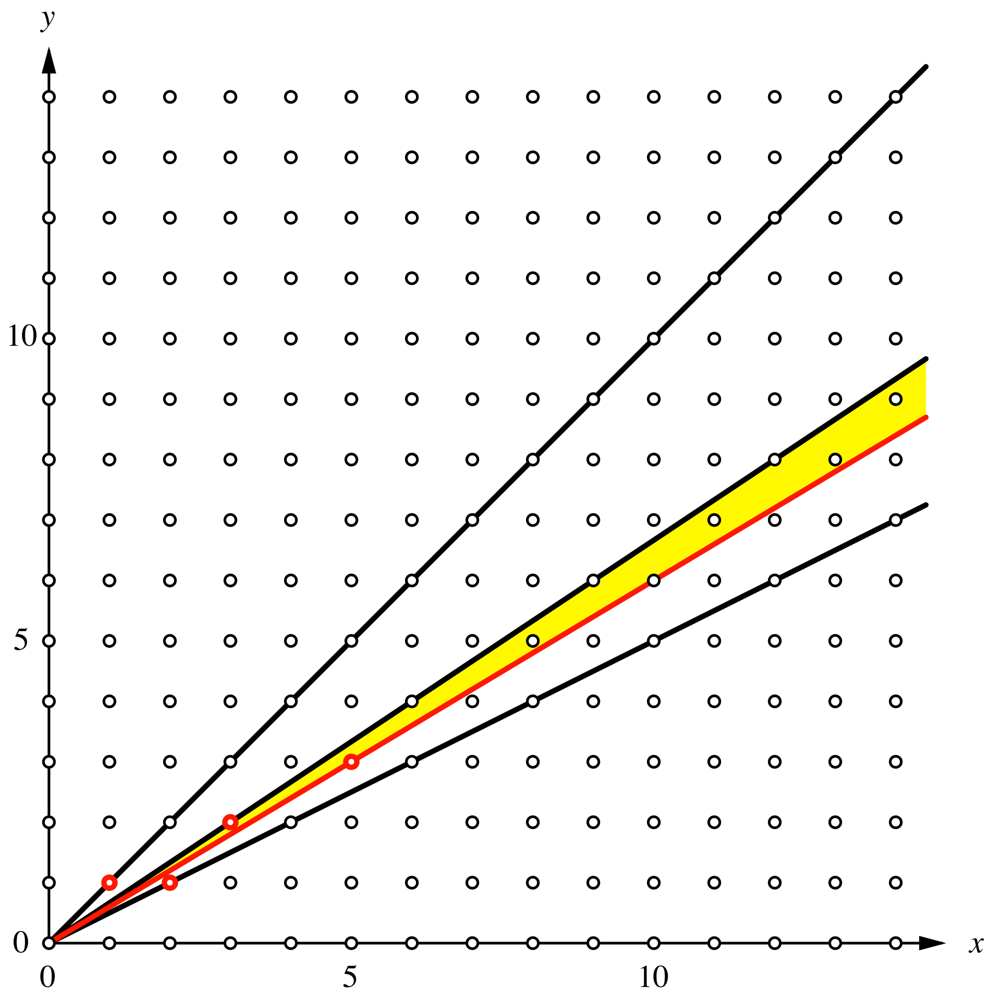

Abb. 5: Nächster Schritt

Für die x-Koordinaten 6 und 7 gibt es keine Punkt im Innern des aktuellen Sektors. Der zum Ursprung nächste Punkt ist (8, 5). Spätestens hier merkt man, dass die Sache mit den Fibonacci-Zahlen zu tun hat.

Die Abbildung 6 zeigt den Folgeschritt.

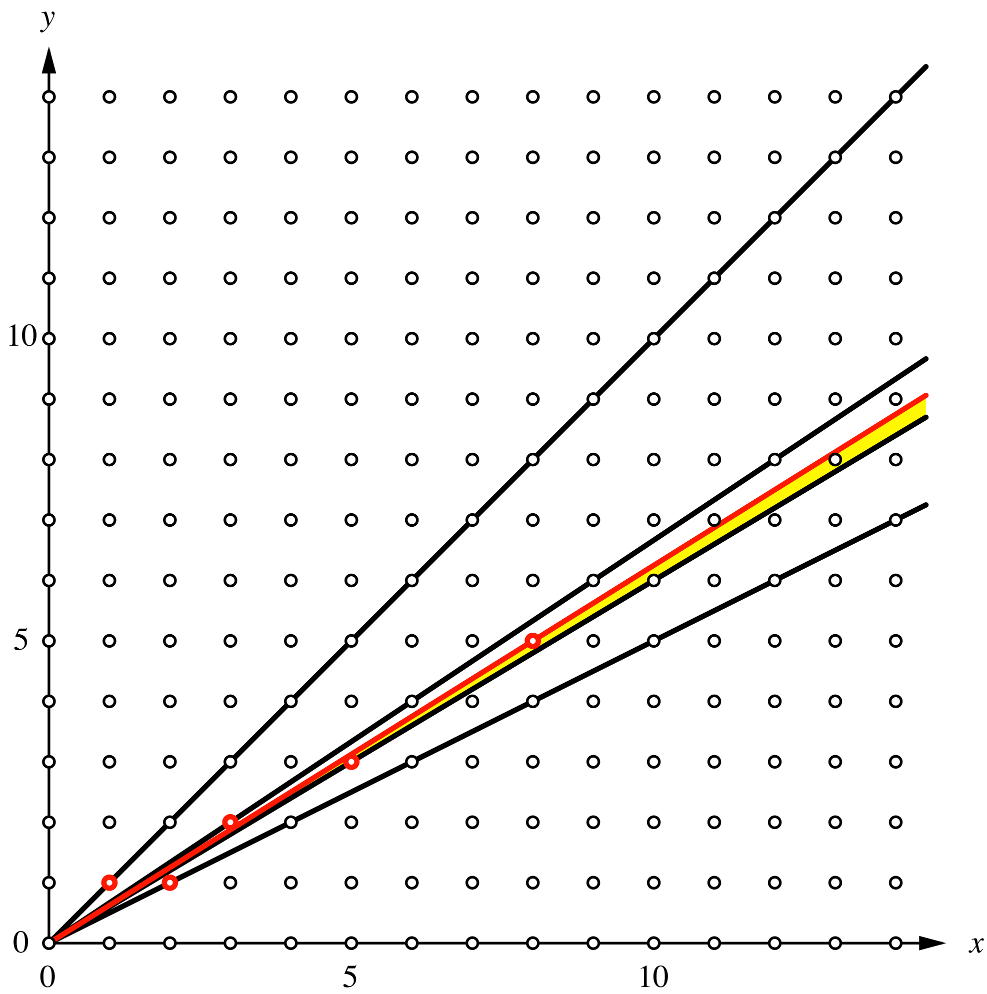

Abb. 6: Nächster Schritt

Für die x-Koordinaten 9, 10, 11 und 12 gibt es keine inneren Punkt im aktuellen Sektor. Der nächste Punkt ist $(13, 8)$.

Die Abbildung 7 zeigt, wie es immer enger wird.

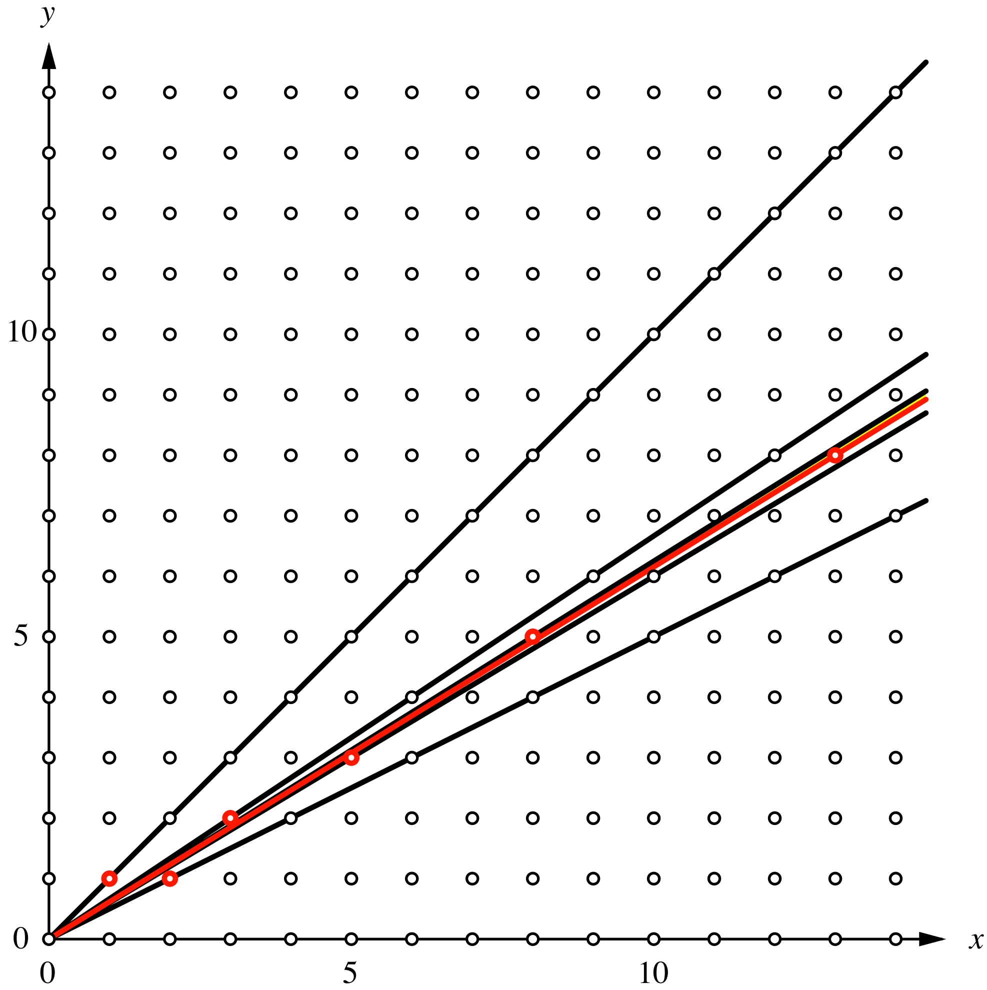

Abb. 7: Enger Sektor

Und so weiter.
Die Strahlen haben der Reihe nach die Steigungen:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$$

Das entspricht den Werten der Tabelle1. Die Steigungen streben gegen den Goldenen Schnitt $\frac{1}{\Phi} \approx 0.618$.

Die jeweils zum Ursprung nächsten Punkte sind:

$$(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 3), (8, 5), (13, 8), \ldots$$

Ihre Abstände vom Ursprung sind der Reihe nach:

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{34}, \sqrt{89}, \sqrt{233}, \ldots$$

Die Quotienten aufeinanderfolgender Abstände streben gegen den Goldenen Schnitt $\Phi \approx 1.618$.

Die Radikanden der Abstände sind eine Teilfolge der Fibonacci-Folge, nämlich jedes zweite Folgenglied. Sie erfüllen die Rekursion:

$$r_{n+1} = 3r_n - r_{n-1}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der üblichen Fibonacci-Rekursion.

Die Quotienten aufeinanderfolgender Radikanden streben gegen das Quadrat des Goldenen Schnittes, also $\Phi^2 \approx 2.618$.