Hans Walser, [20150823]

Fibonacci-Potenzen

1 Worum geht es

Es werden die Quadrate, Kuben und vierte Potenzen der Folgen mit der Fibonacci-Rekursion behandelt. Insbesondere kommen die Fibonacci-Folge und die Lucas-Folge vor.

2 Quadrate

2.1 Rekursion für Quadrate der Fibonacci Zahlen

Aus der Formel von Binet

$$F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right), \quad \Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{1}$$

erhalten wir:

$$F_n^2 = \tfrac{1}{5}\left(\Phi^{2n} - 2(-1)^n + \Phi^{-2n}\right) \tag{2}$$

Behauptung: Es gilt folgende Rekursion:

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \tag{3}$$

Beweis: Nachrechnen unter Verwendung von (2).

2.2 Beginn mit Rekursion

Eine beliebige Folge a_n habe die Rekursion:

$$a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} \tag{4}$$

Daraus ergibt sich:

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2 + 2\tfrac{a_{n-1}}{a_n} - \tfrac{a_{n-2}}{a_n} = 2 + 2\tfrac{a_{n-1}}{a_n} - \tfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\tfrac{a_{n-1}}{a_n} \tag{5}$$

Für den Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} \tag{6}$$

finden wir die kubische Gleichung:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2+2\tfrac{1}{\alpha}-\tfrac{1}{\alpha^2}\\ \alpha^3-2\alpha^2-2\alpha+1&=0\end{aligned} \tag{7}$$

Diese hat die Lösungen:

$$\alpha_1=\Phi^2,\quad \alpha_2=\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2,\quad \alpha_3=-1 \tag{8}$$

Somit gilt für die Folge a_n die verallgemeinerte Binet-Formel:

$$a_n=r_1\Phi^{2n}+r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^{2n}+r_3(-1)^n \tag{9}$$

2.3 Beispiele

2.3.1 Quadrate der Fibonacci-Folge

Fibonacci-Folge:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Tab. 1: Fibonacci-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_2=1 \tag{10}$$

Für die Koeffizienten r_1, r_2, r_3 erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}0&=r_1\Phi^0+r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^0+r_3(-1)^0\\ 1&=r_1\Phi^2+r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2+r_3(-1)^1\\ 1&=r_1\Phi^4+r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4+r_3(-1)^2\end{aligned} \tag{11}$$

Das Geleichungssystem (11) hat die Lösung:

$$r_1 = \tfrac{1}{5}, \quad r_2 = \tfrac{1}{5}, \quad r_3 = -\tfrac{2}{5} \tag{12}$$

Dies ergibt die Formel (2).

2.3.2 Quadrate der Lucas-Folge

Lucas-Folge:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Tab. 2: Lucas-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 9 \tag{13}$$

Für die Koeffizienten r_1, r_2, r_3 erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned} 4 &= r_1\Phi^0 + r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^0 + r_3(-1)^0 \\ 1 &= r_1\Phi^2 + r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 + r_3(-1)^1 \\ 9 &= r_1\Phi^4 + r_2\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4 + r_3(-1)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Das Geleichungssystem (14) hat die Lösung:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 2 \tag{15}$$

Dies ergibt für die Quadrate der Lucas-Folge die besonders einfache Formel:

$$L_n^2 = \Phi^{2n} + \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^{2n} + 2(-1)^n = \left(\Phi^n + \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right)^2 \tag{16}$$

Und tatsächlich:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	4	1	9	16	49	121	324	841	2209

Tab. 3: Quadrate der Lucas-Folge

Aus (16) ergibt sich die Binet-Formel für die Lucas-Folge:

$$L_n = \Phi^n + \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n \tag{17}$$

3 Kuben

Und nun dasselbe für die Kuben.

3.1 Rekursion für die Kuben der Fibonacci Zahlen

Es gilt die Rekursion:

$$F_{n+1}^3 = 3F_n^3 + 6F_{n-1}^3 - 3F_{n-2}^3 - F_{n-3}^3 \tag{18}$$

3.2 Beginn mit der Rekursion

Eine beliebige Folge b_n habe die Rekursion:

$$b_{n+1} = 3b_n + 6b_{n-1} - 3b_{n-2} - b_{n-3} \tag{19}$$

Für den Grenzwert

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \tfrac{b_{n+1}}{b_n} \tag{20}$$

finden wir die Gleichung vierten Grades:

$$\begin{aligned} \beta &= 3 + 6\tfrac{1}{\beta} - 3\tfrac{1}{\beta^2} - \tfrac{1}{\beta^3} \\ \beta^4 &- 3\beta^3 - 6\beta^2 + 3\beta + 1 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Diese hat die Lösungen:

$$\beta_1 = \tfrac{1}{\Phi}, \quad \beta_2 = (-\Phi), \quad \beta_3 = -\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3, \quad \beta_4 = \Phi^3 \tag{22}$$

Somit gilt für die Folge b_n die verallgemeinerte Binet-Formel:

$$b_n = r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^n + r_2(-\Phi)^n + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^n + r_4\left(\Phi^3\right)^n \tag{23}$$

3.3 Beispiele

3.3.1 Kuben der Fibonacci-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 8 \tag{24}$$

Für die Koeffizienten r_1, r_2, r_3, r_4 erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}
0 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^0 + r_2(-\Phi)^0 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^0 + r_4\left(\Phi^3\right)^0 \\
1 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^1 + r_2(-\Phi)^1 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^1 + r_4\left(\Phi^3\right)^1 \\
1 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 + r_2(-\Phi)^2 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^2 + r_4\left(\Phi^3\right)^2 \\
8 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3 + r_2(-\Phi)^3 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^3 + r_4\left(\Phi^3\right)^3
\end{aligned} \tag{25}$$

Das Geleichungssystem (25) hat die Lösung:

$$r_1 = \tfrac{3}{25}\sqrt{5}, \quad r_2 = -\tfrac{3}{25}\sqrt{5}, \quad r_3 = -\tfrac{1}{25}\sqrt{5}, \quad r_4 = \tfrac{1}{25}\sqrt{5} \tag{26}$$

Dies ergibt die Formel:

$$\begin{aligned}
F_n^3 &= 3\tfrac{\sqrt{5}}{25}\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^n - 3\tfrac{\sqrt{5}}{25}(-\Phi)^n - \tfrac{\sqrt{5}}{25}\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^n + \tfrac{\sqrt{5}}{25}\left(\Phi^3\right)^n \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}^3}\left(\left(\Phi^n\right) - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right)^3
\end{aligned} \tag{27}$$

3.3.2 Kuben der Lucas-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$b_0 = 8, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 27, \quad b_3 = 64 \tag{28}$$

Für die Koeffizienten r_1, r_2, r_3, r_4 erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}
8 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^0 + r_2(-\Phi)^0 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^0 + r_4\left(\Phi^3\right)^0 \\
1 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^1 + r_2(-\Phi)^1 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^1 + r_4\left(\Phi^3\right)^1 \\
27 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 + r_2(-\Phi)^2 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^2 + r_4\left(\Phi^3\right)^2 \\
64 &= r_1\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3 + r_2(-\Phi)^3 + r_3\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^3 + r_4\left(\Phi^3\right)^3
\end{aligned} \tag{29}$$

Das Geleichungssystem (29) hat die Lösung:

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = 1 \tag{30}$$

Dies ergibt die Formel:

$$L_n^3 = 3\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^n + 3(-\Phi)^n + \left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3\right)^n + \left(\Phi^3\right)^n = \left(\left(\Phi^n\right) + \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right)^3 \tag{31}$$

4 Vierte Potenzen

Und nun dasselbe für die vierten Potenzen.

4.1 Rekursion für die Kuben der Fibonacci Zahlen

Es gilt die Rekursion:

$$F_{n+1}^4 = 5F_n^4 + 15F_{n-1}^4 - 15F_{n-2}^4 - 5F_{n-3}^4 + F_{n-4}^4 \tag{32}$$

4.2 Beginn mit der Rekursion

Eine beliebige Folge c_n habe die Rekursion:

$$c_{n+1} = 5c_n + 15c_{n-1} - 15c_{n-2} - 5c_{n-3} + c_{n-4} \tag{33}$$

Für den Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \tfrac{c_{n+1}}{c_n} \tag{34}$$

finden wir die Gleichung fünften Grades:

$$\begin{aligned} &\gamma = 5 + 15\tfrac{1}{\gamma} - 15\tfrac{1}{\gamma^2} - 5\tfrac{1}{\gamma^3} + \tfrac{1}{\gamma^4} \\ &\gamma^5 - 5\gamma^4 - 15\gamma^3 + 15\gamma^2 + 5\gamma - 1 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Diese hat die Lösungen:

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = -\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2, \quad \gamma_3 = -\Phi^2, \quad \gamma_4 = \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4, \quad \gamma_5 = \Phi^4 \tag{36}$$

Somit gilt für die Folge c_n die verallgemeinerte Binet-Formel:

$$c_n = r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^n + r_3\left(-\Phi^2\right)^n + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^n + r_5\left(\Phi^4\right)^n \tag{37}$$

4.3 Beispiele

4.3.1 Vierte Potenzen der Fibonacci-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 16, \quad c_4 = 81 \tag{38}$$

Für die Koeffizienten r_1, r_2, r_3, r_4 erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}
0 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^0 + r_3\left(-\Phi^2\right)^0 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^0 + r_5\left(\Phi^4\right)^0 \\
1 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^1 + r_3\left(-\Phi^2\right)^1 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^1 + r_5\left(\Phi^4\right)^1 \\
1 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^2 + r_3\left(-\Phi^2\right)^2 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^2 + r_5\left(\Phi^4\right)^2 \\
16 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^3 + r_3\left(-\Phi^2\right)^3 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^3 + r_5\left(\Phi^4\right)^3 \\
81 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^4 + r_3\left(-\Phi^2\right)^4 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^4 + r_5\left(\Phi^4\right)^4
\end{aligned} \tag{39}$$

Das Geleichungssystem (39) hat die Lösung:

$$r_1 = \tfrac{6}{25}, \quad r_2 = -\tfrac{4}{25}, \quad r_3 = -\tfrac{4}{25}, \quad r_4 = \tfrac{1}{25}, \quad r_5 = \tfrac{1}{25} \tag{40}$$

Dies ergibt die Formel:

$$F_n^4 = \tfrac{6}{25} - \tfrac{4}{25}\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^n - \tfrac{4}{25}\left(-\Phi^2\right)^n + \tfrac{1}{25}\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^n + \tfrac{1}{25}\left(\Phi^4\right)^n \tag{41}$$

4.3.2 Vierte Potenzen der Lucas-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$c_0 = 16, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 81, \quad c_3 = 256, \quad c_4 = 2401 \tag{42}$$

Für die Koeffizienten r_1, r_2, r_3, r_4 erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}
16 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^0 + r_3\left(-\Phi^2\right)^0 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^0 + r_5\left(\Phi^4\right)^0 \\
1 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^1 + r_3\left(-\Phi^2\right)^1 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^1 + r_5\left(\Phi^4\right)^1 \\
81 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^2 + r_3\left(-\Phi^2\right)^2 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^2 + r_5\left(\Phi^4\right)^2 \\
256 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^3 + r_3\left(-\Phi^2\right)^3 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^3 + r_5\left(\Phi^4\right)^3 \\
2406 &= r_1 + r_2\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^4 + r_3\left(-\Phi^2\right)^4 + r_4\left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^4 + r_5\left(\Phi^4\right)^4
\end{aligned} \tag{43}$$

Das Geleichungssystem (43) hat die Lösung:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 4, \quad r_4 = 1, \quad r_5 = 1 \tag{44}$$

Dies ergibt die Formel:

$$L_n^4 = 6 + 4\left(-\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2\right)^n + 4\left(-\Phi^2\right)^n + \left(\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^4\right)^n + \left(\Phi^4\right)^n = \left(\Phi^n + \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right)^4 \tag{45}$$

Da haben wir etwas mit der Kirche ums Dorf gerechnet.