Hans Walser, [20220108]

Fibonacci-Summenformel

1 Die Formel

Mit der üblichen Bezeichnung F_n für die Fibonacci-Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \qquad (1)$$

2 Beispiele

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Summe	1	2	4	7	12	20	33		

Beispiele

3 Induktiver Beweis:

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} F_k = F_1 = 1 \stackrel{?}{=} F_3 - 1 = 2 - 1 = 1 \qquad (2)$$

Weiter ist nach Induktionsvoraussetzung (1):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} F_k &= \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) + F_{n+1} = \left(F_{n+2} - 1\right) + F_{n+1} \\ &= \underbrace{F_{n+1} + F_{n+2}}_{=F_{n+3}} - 1 = F_{n+3} + 1 = F_{(n+1)+2} + 1\end{aligned} \qquad (3)$$

4 Formel von Binet

Mit dem Goldenen Schnitt

$$\Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

lautet die Formel von Binet:

$$F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right) \tag{5}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} F_k &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=1}^{n}\Phi^k - \sum_{k=1}^{n}\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^k\right)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\Phi^{n+1}-1}{\Phi-1} - \frac{\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^{n+1}-1}{-\tfrac{1}{\Phi}-1}\right)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\Phi^{n+1}-1}{\tfrac{1}{\Phi}} - \frac{\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^{n+1}-1}{-\Phi}\right)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+2} - \Phi - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^{n+2} - \tfrac{1}{\Phi}\right)\\
&= \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+2} - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^{n+2}\right)}_{F_{n+2}} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\underbrace{\left(-\Phi - \tfrac{1}{\Phi}\right)}_{-\sqrt{5}} = F_{n+2} - 1
\end{aligned} \tag{6}$$

Websites

Hans Walser: Fibonacci in the Triangular Lattice
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Fibonacci_Triangle/Fibonacci_Triangle.htm