Fibonacci und Dividieren

1 Die Formel

Es sei a_n die verallgemeinerte Fibonacci-Folge mit der Rekursion

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

und den Startwerten $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Dann ist:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = \frac{1}{100-10p-q}$$

2 Beispiele

2.1 *p* = 8, *q* = 3

```
> restart:
n:=200:
p:=8: q:=3:
infolevel[all]:=3:
a:=array(1..n):
a[1]:=0: a[2]:=1:
for i from 1 to n-2 do a[i+2]:=p*a[i+1]+q*a[i]: od:
s:=0:
for i from 1 to n-2 do s:=s+a[i]/10^i: od:
s:=evalf(s):
userinfo(3,all,`s =`,s);
userinfo(3,all,`Sollwert =`,1/(100-10*p-q), `=`,evalf(1/(100-10*p-q)));
s =  .5882352941e-1
Sollwert =  1/17  =  .5882352941e-1
```

2.2 *p* = 1, *q* = 1

In diesem Beispiel erhalten wir die klassische Fibonacci-Folge, die in den ersten Ziffern (und unter Berücksichtigung der Überträge auch in den folgenden Ziffern) der Dezimalentwicklung von $\frac{1}{89} = 0.01123595506\ldots$ auszumachen ist:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{89} & = & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 3 & & & \\
 & & & & & & & & & & & 2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 3 & 4 & \\
 & & & & & & & & & & & & & 5 & 5 \\
\hline
\frac{1}{89} & = & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 5 & . & . & .
\end{array}$$

```
> restart:
n:=200:
p:=1: q:=1:
infolevel[all]:=3:
a:=array(1..n):
a[1]:=0: a[2]:=1:
for i from 1 to n-2 do a[i+2]:=p*a[i+1]+q*a[i]: od:
s:=0:
for i from 1 to n-2 do s:=s+a[i]/10^i: od:
s:=evalf(s):
userinfo(3,all,`s =`,s);
userinfo(3,all,`Sollwert =`,1/(100-10*p-q), `=`,evalf(1/(100-10*p-q)));
s =   .1123595506e-1
Sollwert =   1/89   =   .1123595506e-1
```

3 Beweis

Behauptung: $s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = \frac{1}{100-10p-q}$

Zu zeigen ist: $s(100-10p-q) = (100-10p-q)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = 1$

Explizit ist:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
100s & = & \frac{100a_1}{10} & + & \frac{100a_2}{100} & + & \frac{100a_3}{1000} & + & \frac{100a_4}{10000} & + & \frac{100a_5}{100000} & + & \cdots \\
-10ps & = & & - & \frac{10pa_1}{10} & - & \frac{10pa_2}{100} & - & \frac{10pa_3}{1000} & - & \frac{10pa_4}{10000} & - & \cdots \\
-qs & = & & & & - & \frac{qa_1}{10} & - & \frac{qa_2}{100} & - & \frac{qa_3}{1000} & - & \cdots \\
\hline
(100-10p-q)s & = & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots
\end{array}$$

Die Nullen in den Spalten (mit Ausnahme der zweiten Spalte) sind eine Folge der Rekursion $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$.

4 Bemerkung

Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung entsprechender Summenformeln für geometrische Folgen und Reihen.