

Hans Walser, [20191106]

## Fläche und Umfang

Idee und Anregung:

Myriam Hamich, Mosbach und Johann Bernhard Fischer von Erlach

### 1 Worum geht es?

Gebiete von gegebenem Flächeninhalt und Umfang

### 2 Problemstellung

Zeichnen Sie alle möglichen Vielecke, die einen Flächeninhalt  $A = 14$  und einen Umfang  $u = 24$  aufweisen, und deren Eckpunkte rationale Koordinaten haben.

Bemerkung: Wegen den rationalen Koordinaten für die Eckpunkte fällt die klassische Rechtecklösung  $a \times b$  mit  $a = 6 + \sqrt{22}$  und  $b = 6 - \sqrt{22}$  weg.

### 3 Bearbeitung

Es gibt beliebig viele Lösungen. Die Abbildung 1 zeigt exemplarisch drei Lösungen. Bei der dritten Lösung (Abb. 1c) wurde mit einem pythagoreischen Dreieck gearbeitet.

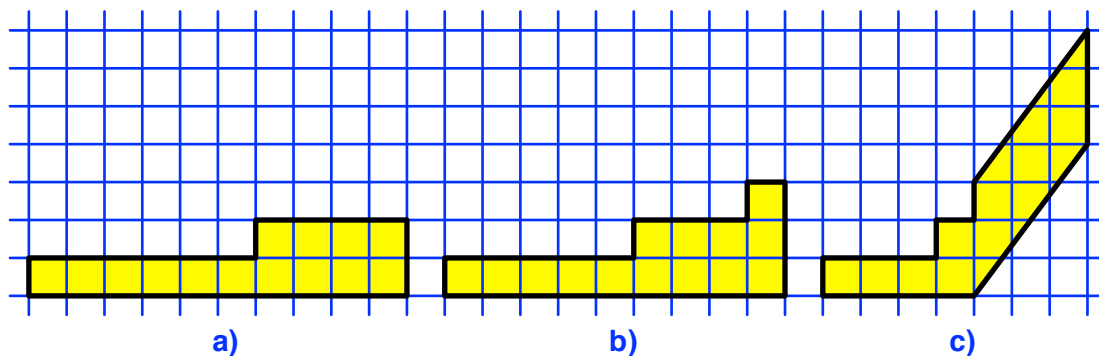
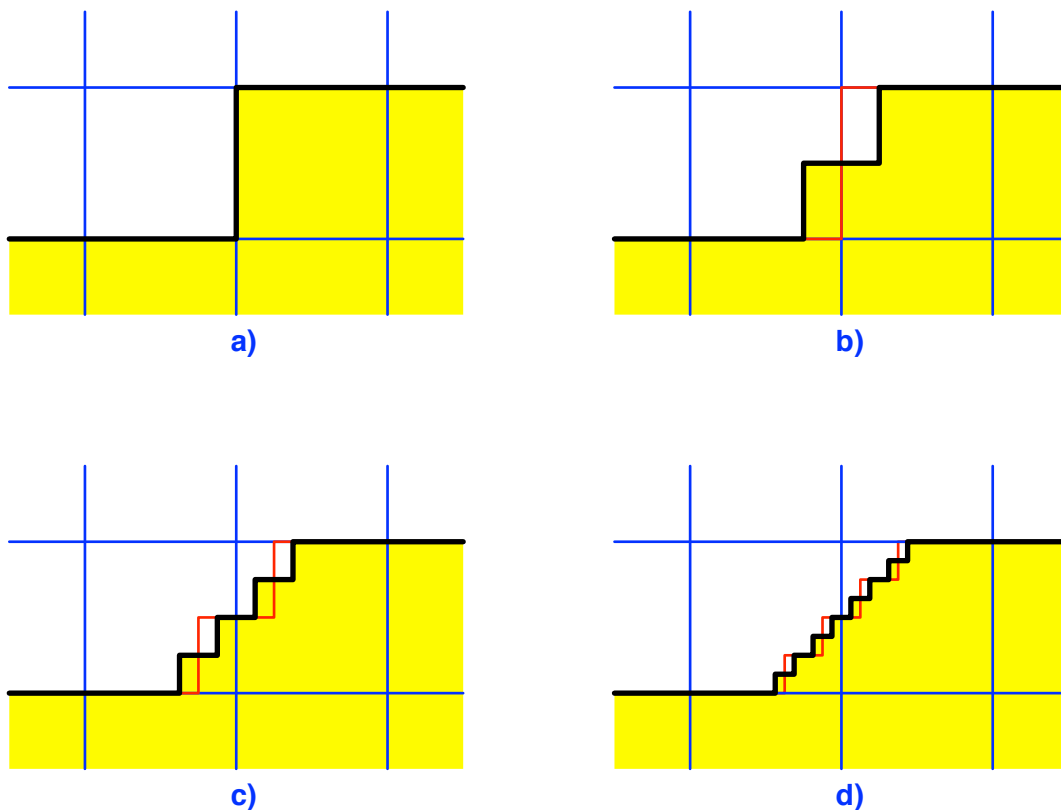


Abb. 1: Drei Lösungen

Die drei Lösungen haben (zufällig) alle eine „Stufe“ (Abb. 2a). Dieses Wort „Stufe“ ist metaphorisch zu verstehen, da wir es ja nicht mit einer richtigen Stiege zu tun haben.



**Abb. 2: Stufen**

Wir können die Stufe zu zwei halb so hohe Stufen verfeinern (Abb. 2b). In rot ist noch die alte Stufe eingezeichnet. Bei diesem Verfeinerungsprozess bleiben Länge und Flächeninhalt unter der Stiege invariant. Wir können diesen Verfeinerungsprozess iterieren. Bei jeder Prozessstufe (das Wort „„Stufe““) ist hier metametaphorisch zu verstehen) verdoppelt sich die Anzahl der „Stufen“ unserer „Stiege“.

Es gibt also beliebig viele Lösungen.

Damit gibt es unendlich viele Lösungen, denn eine endliche Anzahl von Lösungen wäre im Widerspruch zur Beliebigkeit.

#### 4 Grenzlage

Die Abbildung 3 zeigt die Grenzlage.

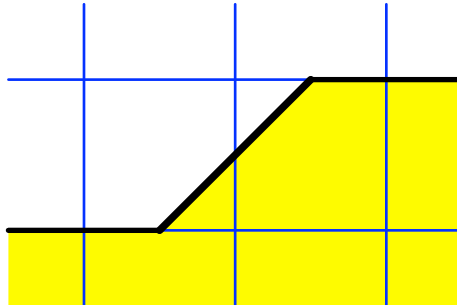


Abb. 3: Grenzlage

Die Grenzlage sieht aus wie eine schräge Gerade mit der Länge  $\sqrt{2}$ . In Wirklichkeit ist es eine „Stiege“ mit unendlich vielen „Stufen“. Die Länge, waagrecht und senkrecht zusammengezählt, ist 2.