Hans Walser, [20190512]

Flächensatz im Dreieck

1 Worum geht es?

Ein Satz über Quadrate von Flächen im gleichseitigen Dreieck. Sonderfall einer Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

2 Der Satz

Auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC wählen wir einen Punkt P wie zum Beispiel in der Abbildung 1.

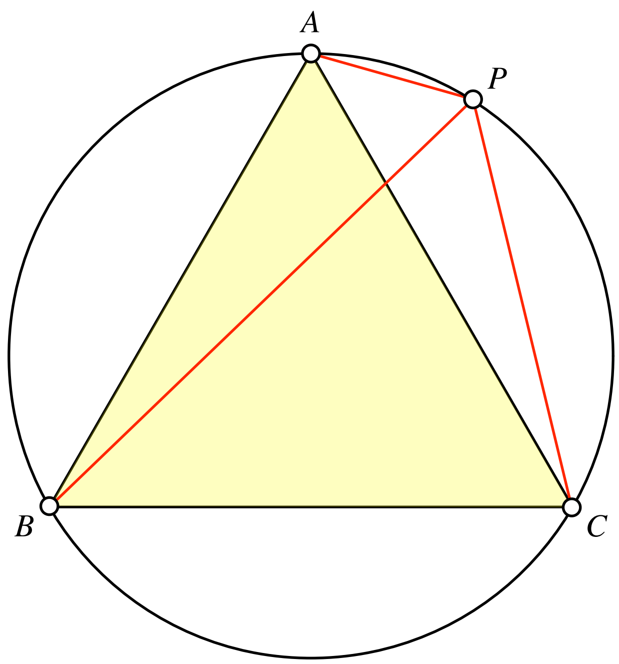

Abb. 1: Situation

Dann gilt (F bedeutet den Flächeninhalt):

$$F_{\Delta PAB}^2 + F_{\Delta PBC}^2 + F_{\Delta PCA}^2 = F_{\Delta ABC}^2 \tag{1}$$

Wir haben es also mit einer Summe von Quadraten von Flächen zu tun. Die Sache spielt im vierdimensionalen Raum.

Formal ist es eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Wegen der Vierdimensionalität lassen sich die „Quadrate“ nicht durch geometrische Quadrate visualisieren.

3 Beweis

3.1 Bezeichnungen

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 2.

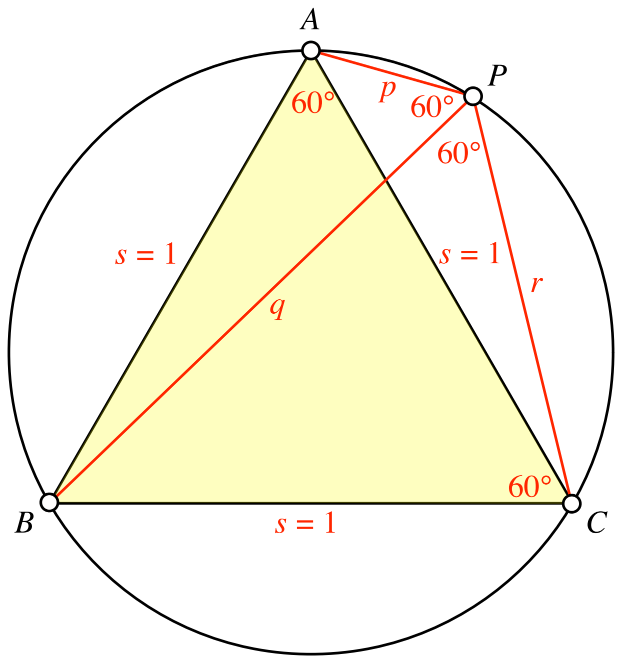

Abb. 2: Bezeichnungen

3.2 Normierung

Für die Rechnungen setzen wir die Dreiecksseite $s = 1$. Damit ist:

$$F_{\Delta ABC} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad F_{\Delta ABC}^2 = \tfrac{3}{16} \tag{2}$$

3.3 Satz des Ptolemäus

Das Viereck $ABCP$ ist ein Sehnenviereck. Nach dem Satz des Ptolemäus ist daher:

$$ps + rs = qs \quad \Rightarrow \quad q = p + r \tag{3}$$

3.4 Ohne Satz des Ptolemäus

Die Beziehung (3) kann auch ohne den Satz des Ptolemäus hergeleitet werden. Dazu unterteilen wir das Viereck $ABCP$ in zwei gleichseitige Dreiecke mit den Seitenlängen p und r (orange und magenta in Abb. 3) sowie zwei kongruente und auch zum Dreieck

PCA kongruente Dreiecke mit den Seitenlängen p, r und s (zyan und grün). Darin kann die Beziehung (3) direkt abgelesen werden.

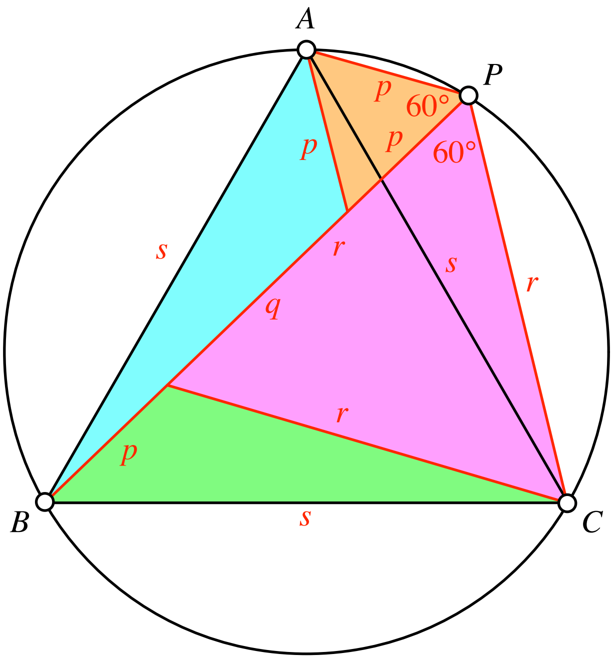

Abb. 3: Unterteilung

3.5 Flächenberechnungen

Der Umkreisbogen CA ist Ortsbogen für 60° und 120°. Wegen

$$\sin\left(60^\circ\right)=\sin\left(120^\circ\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \tag{4}$$

und (3) erhalten wir für die neuen Dreiecksflächen:

$$\begin{aligned} F_{\Delta PAB} &= \tfrac{1}{4}p\left(p+r\right)\sqrt{3} \\ F_{\Delta PBC} &= \tfrac{1}{4}\left(p+r\right)r\sqrt{3} \\ F_{\Delta PCA} &= \tfrac{1}{4}rp\sqrt{3} \end{aligned} \tag{5}$$

Mit (3), (4) und (5) erhalten wir für die linke Seite von (1) mit einiger Rechnung:

$$\begin{aligned} F_{\Delta PAB}^2 + F_{\Delta PBC}^2 + F_{\Delta PCA}^2 &= \tfrac{3}{16}\left(p^4 + 2p^3r + 3p^2r^2 + 2pr^3 + r^4\right) \\ &= \tfrac{3}{16}\left(p^2 + pr + r^2\right)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

3.6 Kosinussatz

Aus dem Kosinussatz für das Dreieck *PCA* ergibt sich:

$$s^2 = p^2 + r^2 - 2pr\underbrace{\cos\left(120°\right)}_{-\frac{1}{2}} = p^2 + pr + r^2 \tag{7}$$

3.7 Schluss

Wegen $s = 1$ ist die letzte Klammer in (6) also 1. Damit hat die linke Seite von (1) denselben Wert wie die rechte Seite. Dies war zu zeigen.

Websites

Hans Walser: Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/V/Verallg_Pythagoras2/Verallg_Pythagoras2.htm