Hans Walser, [20200116]

Flächenwinkel bei regelmäßigen Polyedern

1 Worum geht es?

Einheitliche Formel zur Berechnung des Flächenwinkels bei regelmäßigen Polyedern. Herleitung mit sphärischer Trigonometrie.

2 Bezeichnungen

Die Seitenflächen des Polyeders sind regelmäßige n-Ecke.

An jeder Polyederecke kommen k Seitenflächen zusammen.

Beispiel Ikosaeder: $n = 3$, $k = 5$. An jeder Ecke kommen 5 Dreiecke zusammen.

3 Vorgehen

Wir schneiden eine Polyederecke mit einer Einheitskugel, welche ihr Zentrum in der Polyederecke hat.

3.1 Tetraeder

Wir illustrieren das Vorgehen zunächst am Tetraeder (Abb. 1.1).

Abb. 1.1: Tetraeder

An den Ecken des Tetraeders setzen wir blaue Kugeln mit dem Radius 1 an (Abb. 1.2). Es würde genügen, an einer einzigen Tetraederecke eine blaue Kugel anzusetzen,

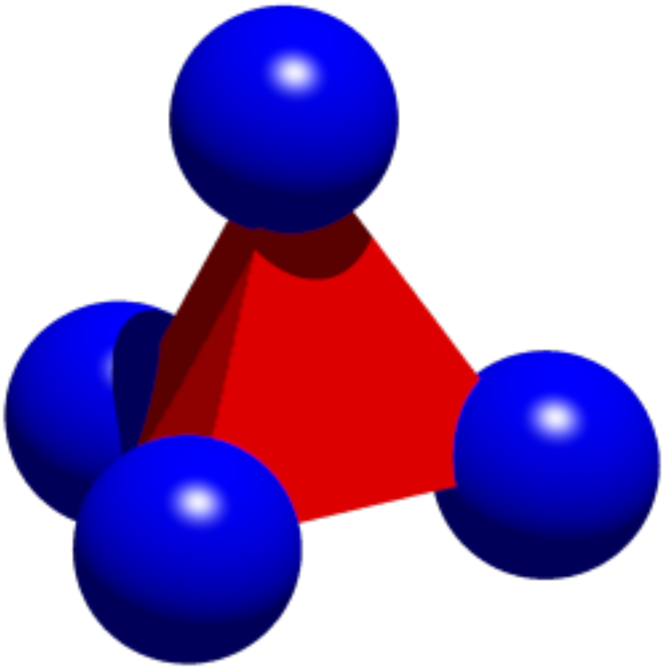

Abb. 1.2: Kugeln

Nun nehmen wir die Schnittfiguren des Tetraeders mit den Kugeln (Abb. 1.3).

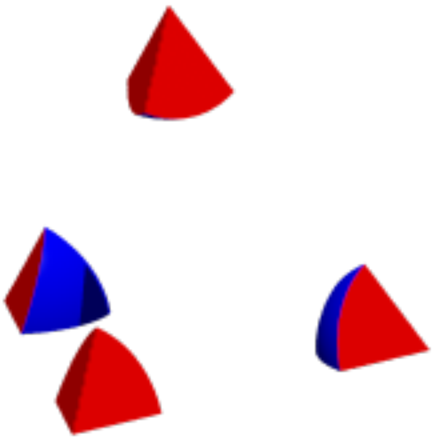

Abb. 1.3: Schnittfiguren

Wir erhalten blaue sphärische Dreiecke (Abb. 1.4). Die gleichseitigen Seitendreiecke des Tetraeders haben Winkel von 60° und ergeben daher für die blauen sphärischen Dreiecke eine Seitenlänge von $\frac{\pi}{3}$. Dies ist das zu 60° gehörende Bogenmaß; die blauen Kugeln haben ja den Radius 1. Der in der Abbildung 1.4b eingezeichnete Winkel α ist der gesuchte Flächenwinkel des Tetraeders. Dies ist darum so, weil die Kreisbögen der roten Sektoren rechtwinklig auf die Tetraederkanten auftreffen.

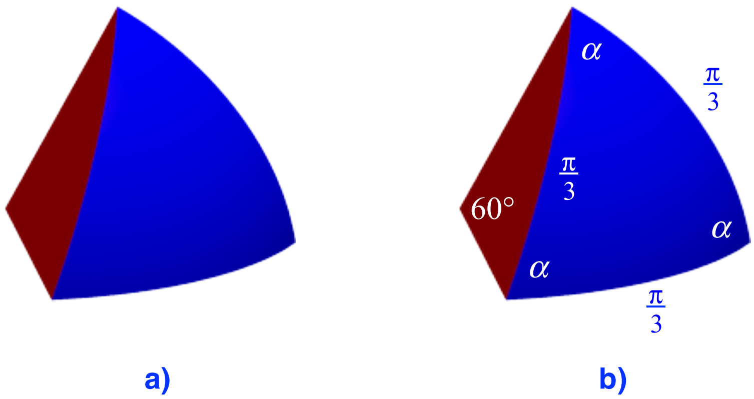

Abb. 1.4: Sphärisches Dreieck

3.2 Allgemein

Im allgemeinen Fall schneidet jede der k Seitenflächen des Polyeders aus der Kugel einen Sektor heraus. Das ergibt einen Kugelsektor (Abb. 2 für $k = 5$) und auf der Kugel ein regelmäßiges sphärisches k-Eck.

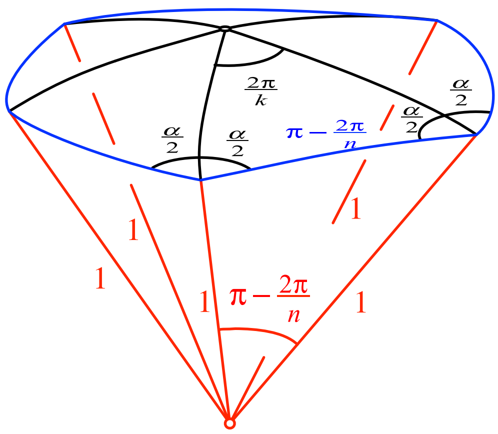

Abb. 2: Kugelsektor und regelmäßiges sphärisches k-Eck

Da die Seitenflächen des Polyeders regelmäßige n-Ecke sind, haben sie einen Innenwinkel $\pi - \frac{2\pi}{n}$. Dies ist auch die Seitenlänge des regelmäßigen sphärischen k-Ecks.

In der Abbildung 2 sind auch noch der Mittelpunkt des sphärischen k-Ecks und die Speichen eingezeichnet. Wegen der Regelmäßigkeit ergeben sich dort Winkel $\frac{2\pi}{k}$.

Die Abbildung 3a zeigt die Situation von oben.

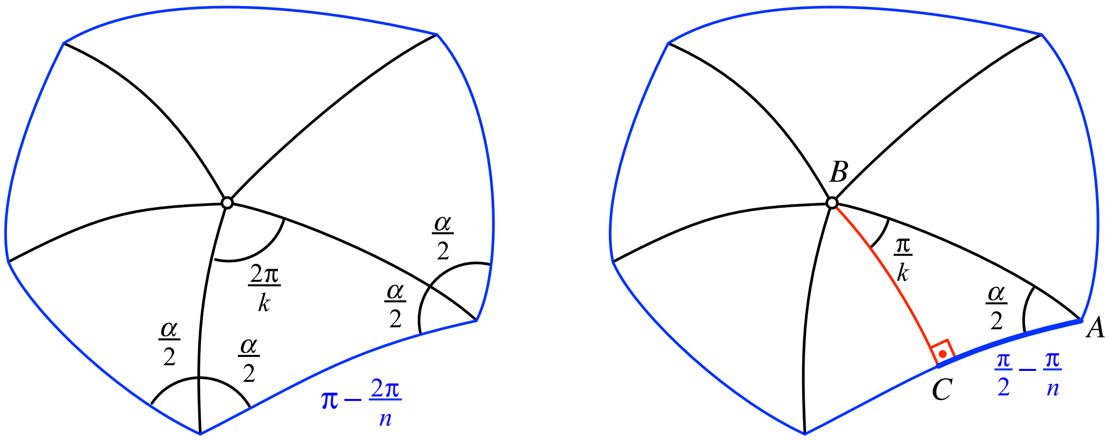

Abb. 3: Sicht von oben

Im Prinzip könnte man im einem der in der Abbildung 3a eingezeichneten Dreiecke mit dem Winkel-Kosinus-Satz weiterarbeiten. Es ist aber einfacher, den Symmetriebogen einzuzeichnen (Abb. 3b). So erhalten wir ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck *ABC*. Wir verwenden auch hier den Winkel-Kosinus-Satz. Dieser lautet allgemein:

$$\cos(\beta) = -\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)\cos(b) \qquad (1)$$

In unserem Fall spielt $\frac{\alpha}{2}$ die Rolle von α. Weiter ist $\beta = \frac{\pi}{k}$ und $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Schließlich ist $b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. Damit erhalten wir aus (1):

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{k}\right) = -\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0}\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{1}\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{n}\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \qquad (2)$$

Daraus ergibt sich die Superformel:

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) \qquad (3)$$

4 Übersicht

Die Tabelle 1 gibt die numerischen Werte [°].

n	*k*	Flächenwinkel [°]	Bemerkung
3	2	0	Dreiecktüte
3	3	70.52877936	Tetraeder
3	4	109.4712206	Oktaeder
3	5	138.1896852	Ikosaeder
3	6	180	Dreiecksraster
3	7	180– 32.44409656i	komplex
4	2	0	Vierecktüte
4	3	90	Hexaeder (Würfel)
4	4	180	Quadratraster
4	5	180 – 60.80658181i	komplex
4	6	180 – 75.45612938i	komplex
4	7	180 – 83.02586576i	komplex
5	2	0	Fünfecktüte
5	3	116.5650511	Dodekaeder
5	4	180 – 71.83397196i	komplex
5	5	180 – 96.54133507i	komplex
5	6	180 – 107.5114763i	komplex
5	7	180 – 113.5852555i	komplex
6	2	0	Sechsecktüte
6	3	180	Bienenwabenmuster
6	4	180 – 100.9979734i	komplex
6	5	180 – 121.6131639i	komplex
6	6	180 – 131.3466595i	komplex
6	7	180 – 136.8457473i	komplex
7	2	0	Siebenecktüte
7	3	180 – 62.48389295i	komplex
7	4	180 – 122.6593618i	komplex
7	5	180 – 141.5196510i	komplex
7	6	180 – 150.6462673i	komplex
7	7	180 – 155.8504617i	komplex

Tab. 1: Flächenwinkel

Websites

Hans Walser: Flächenwinkel
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Flaechenwinkel/Flaechenwinkel.htm

Hans Walser: Sphärische Trigonometrie
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Sphaer_Trigo/Sphaer_Trigo.pdf

Hans Walser: Formeln für die sphärische, euklidische und hyperbolische Geometrie
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Formeln/Formeln.htm

Literatur

Walser, Hans (2017): EAGLE STARTHILFE *Kartografie*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-95922-098-9.