Hans Walser, [20191113]

Flächengleiche rechtwinklige Dreiecke

1 Worum geht es?

Wir bauen mit flächengleichen rechtwinkligen Dreiecken eine eckige Spirale.

2 Konstruktion

Wir beginnen mit einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck der Kathetenlänge 1 (Abb. 1b). Dieses Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Dies soll auch der Flächeninhalt aller nachfolgenden Dreiecke sein.

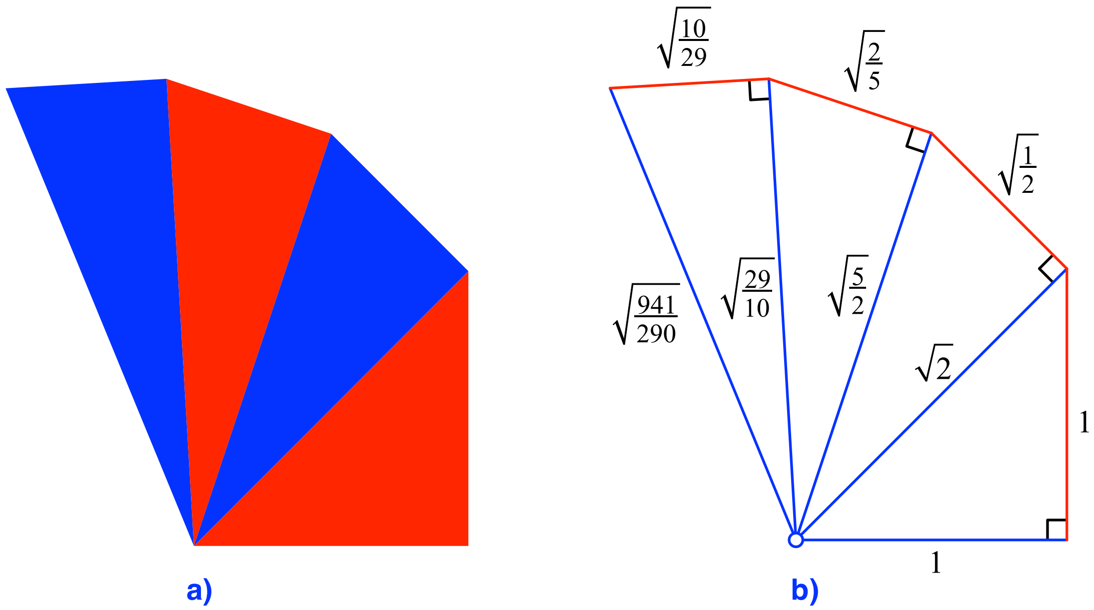

Abb. 1: Konstruktion

Für die Hypotenuse dieses ersten Dreiecks erhalten wir $\sqrt{2}$. Dies ist auch eine der beiden Katheten des zweiten Dreiecks. Aus der Bedingung der Flächengleichheit ergibt sich für die andere Kathete des zweiten Dreiecks $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und für die Hypotenuse $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Entsprechend fahren wir weiter. Die Abbildung 1a zeigt die ersten vier flächengleichen Dreiecke.

3 Berechnungen

3.1 Radikandenfolge

Zunächst berechnen wir die Radikandenfolge $\{b_n\}$ für die blauen Speichen. Diese können wir rekursiv berechnen. Wir setzen den Startwert

$$b_1 = 1 \tag{1}$$

und arbeiten mit der Rekursion:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} \tag{2}$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten 8 Werte der Folge (Abb. 1b).

n	b_n rational	b_n dezimal
1	1	1
2	2	2
3	$\frac{5}{2}$	2.5
4	$\frac{29}{10}$	2.9
5	$\frac{941}{290}$	3.244827586
6	$\frac{969581}{272890}$	3.553010370
7	$\frac{1014556267661}{264588959090}$	3.834461843
8	$\frac{1099331737522548368039021}{268440386798659418988490}$	4.095254632

Tab. 1: Erste Werte

Die Folge wächst monoton, da immer etwas dazukommt. Die Frage ist, ob sie konvergiert oder divergiert.

3.2 Divergenz

Die Radikandenfolge $\{b_n\}$ divergiert.

Für den Beweis der Divergenz vergleichen wir mit der Folge:

$$c_n = \sqrt{2}\sqrt{n} \tag{3}$$

Die Tabelle 2 gibt die ersten numerischen Werte.

n	b_n	c_n	$b_n - c_n$
1	1	1.414213562	–0.414213562
2	2	2	0
3	2.5	2.449489743	0.050510257
4	2.9	2.828427124	0.071572876
5	3.244827586	3.162277660	0.082549926
6	3.553010370	3.464101616	0.088908754
7	3.834461842	3.741657387	0.092804455
8	4.095254632	4	0.095254632
9	4.339439692	4.242640686	0.096799006
10	4.569884190	4.472135954	0.097748236
11	4.788708116	4.690415760	0.098292356
12	4.997532704	4.898979486	0.098553218
13	5.197631445	5.099019514	0.098611931
14	5.390026772	5.291502622	0.098524150
15	5.575554607	5.477225575	0.098329032
16	5.754908962	5.656854248	0.098054714
17	5.928673657	5.830951895	0.097721762
18	6.097345447	6	0.097345447
19	6.261351244	6.164414003	0.096937241
20	6.421061179	6.324555320	0.096505859

Tab. 2: Vergleich der beiden Folgen

Für $n \geq 3$ ist $c_n < b_n$. Dies kann induktiv gezeigt werden. Wir arbeiten mit der Funktion:

$$c(n) = \sqrt{2}\sqrt{n} \tag{4}$$

Der Funktionsgraf ist durchgehend negativ gekrümmt (Abb. 2). Für die erste Ableitung erhalten wir:

$$c'(n) = \sqrt{2}\,\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{1}{c(n)} \tag{5}$$

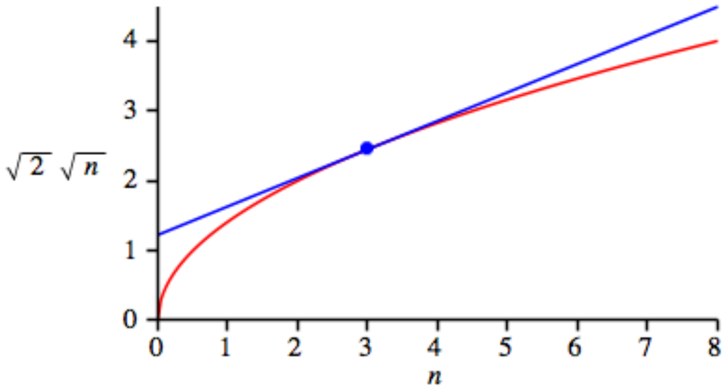

Abb. 2: Abschätzung

Nach Newton ist exemplarisch für $n = 3$:

$$c(3+1) \approx c(3) + c'(3) = c(3) + \tfrac{1}{c(3)} \tag{6}$$

Wegen der negativen Krümmung des Funktionsgrafen kann eine einseitige Abschätzung gemacht werden:

$$c(3+1) < c(3) + c'(3) = c(3) + \tfrac{1}{c(3)} \tag{7}$$

Allgemein ist:

$$\begin{gathered} c(n+1) < c(n) + \tfrac{1}{c(n)} \\ c_{n+1} < c_n + \tfrac{1}{c_n} \end{gathered} \tag{8}$$

Vergleich mit (2) zeigt, dass die Folge $\{c_n\}$ für $n \geq 3$ eine Minorante der Folge $\{b_n\}$ ist. Da die Folge $\{c_n\}$ divergiert, tut dies auch die Folge $\{b_n\}$.

3.3 Speichen und Winkel

Für die vom Zentrum ausgehenden Speichen a_n gilt:

$$a_n = \sqrt{b_n} \tag{9}$$

Die Speichenfolge a_n divergiert ebenfalls. Für die Dreieckswinkel α_n beim Zentrum gilt:

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{\frac{1}{a_n}}{a_n}\right) = \arctan\left(\frac{1}{b_n}\right) \tag{10}$$

Damit haben wir ausreichend Informationen, um die Dreiecksfolge zu zeichnen.

4 Beispiele

Die Abbildung 3 zeigt die ersten 30 Dreiecke.

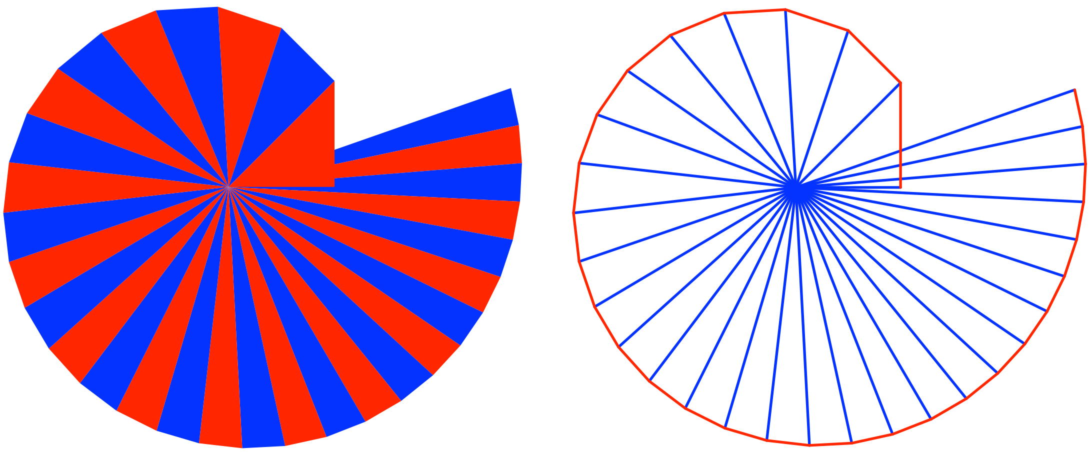

Abb. 3: Die ersten 30 Dreiecke

Die Abbildung 4 zeigt die ersten 1000 Dreiecke.

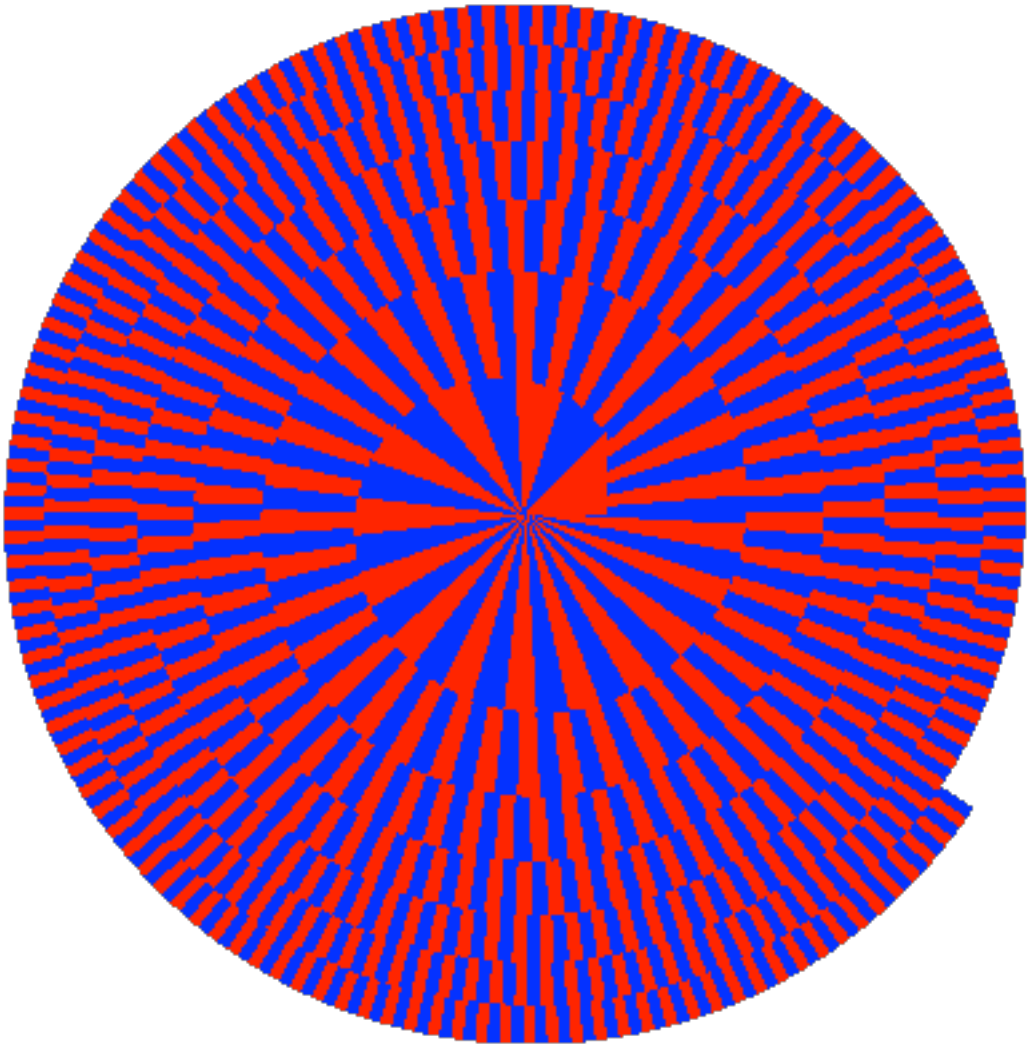

Abb. 4a: Die ersten 1000 Dreiecke

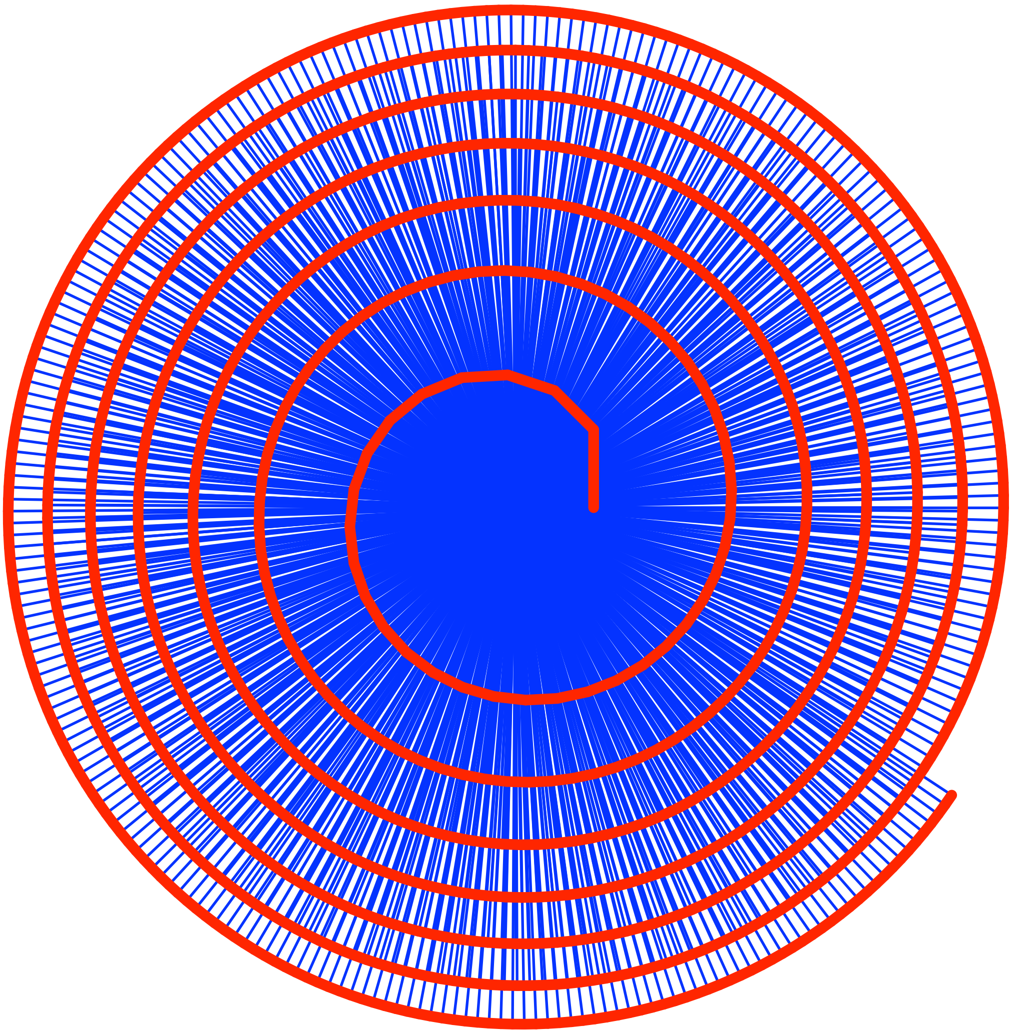

Abb. 4b: Die ersten 1000 Dreiecke

5 Approximation

Die rote eckige Spirale kann approximiert werden durch die Spirale (grün in Abb. 5) mit der Polardarstellung:

$$r(\varphi) = \sqrt{\varphi + \tfrac{\pi}{2}} \tag{11}$$

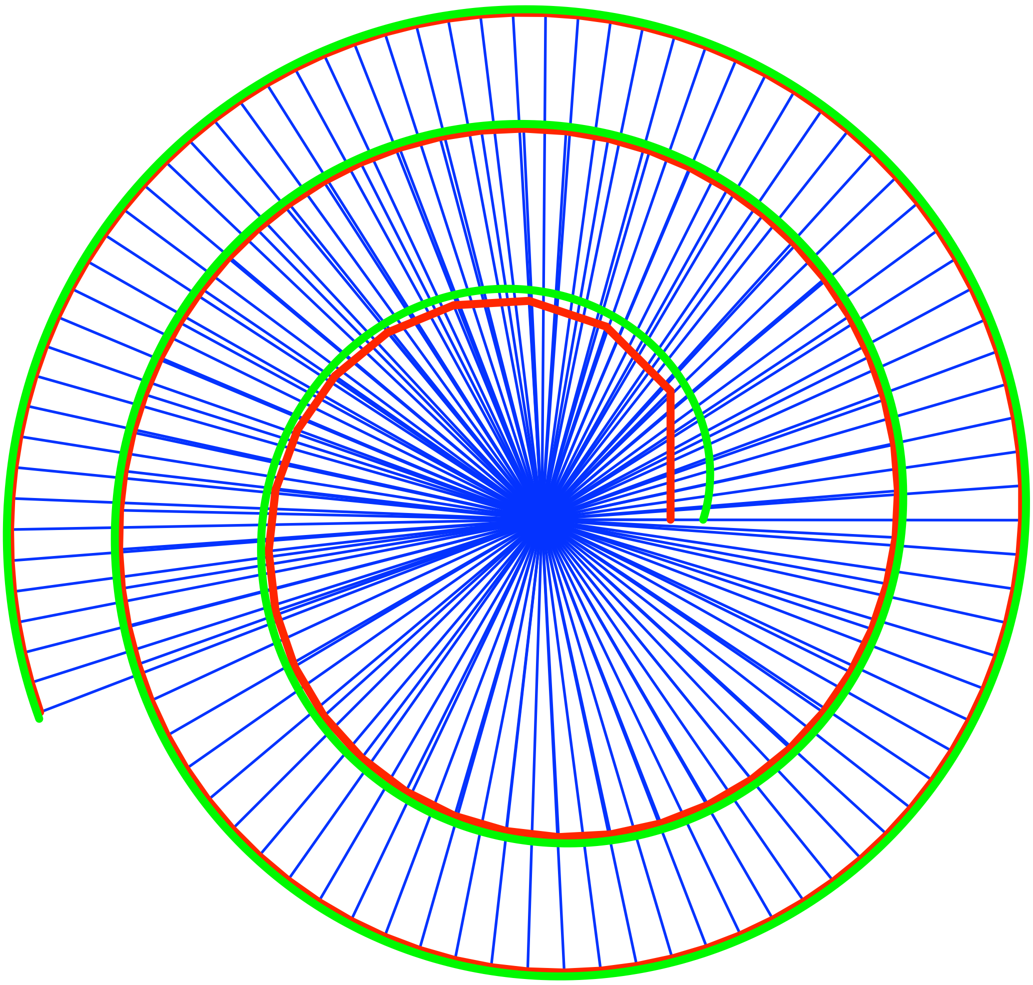

Abb. 5: Approximation