Hans Walser, [20190709]

Frégier

1 Worum geht es?

Zusammenhang zwischen dem Frégier-Kegelschnitt und der Evolute.

Zusammenstellung von Resultaten.

Formeln im Anhang.

2 Der Satz von Frégier

Der Satz von M. Frégier (1815) besagt folgendes:

Werden einem Kegelschnitt c rechtwinklige Dreiecke einbeschrieben derart dass sie eine gemeinsame Rechtwinkelecke C haben, so gehen deren Hypotenusen durch einen gemeinsamen Punkt F.

Den Punkt F nennen wir *Frégier-Punkt* zu C bezüglich c.

Die Abbildung 1 illustriert den Sachverhalt für eine Ellipse.

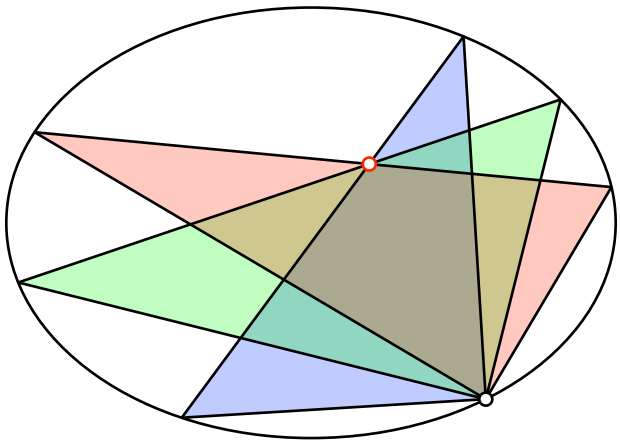

Abb. 1: Satz von Frégier

Im Sonderfall eines Kreises ist der Frégier-Punkt dessen Zentrum.

3 Frégier-Kegelschnitte

Die Menge der Frégier-Punkte zu sämtlichen Punkten eines Kegelschnittes bildet wieder einen Kegelschnitt. Wir bezeichnen ihn als *Frégier-Kegelschnitt*. Im Falle einer Parabel ist die Frégier-Parabel eine kongruente, aber verschobene Parabel. Im Falle einer Ellipse oder Hyperbel ist der Frégier-Kegelschnitt eine dazu zentrisch ähnliche Ellipse beziehungsweise Hyperbel.

In den folgenden Beispielen ist der gegebene Kegelschnitt schwarz gezeichnet, der zugehörige Frégier-Kegelschnitt rot.

Zusätzlich ist die Evolute des gegebenen Kegelschnittes in blau eingezeichnet.

Der Frégier-Kegelschnitt und die Evolute berühren sich. Die Berührungstangenten (grün) sind orthogonal.

3.1 Parabel

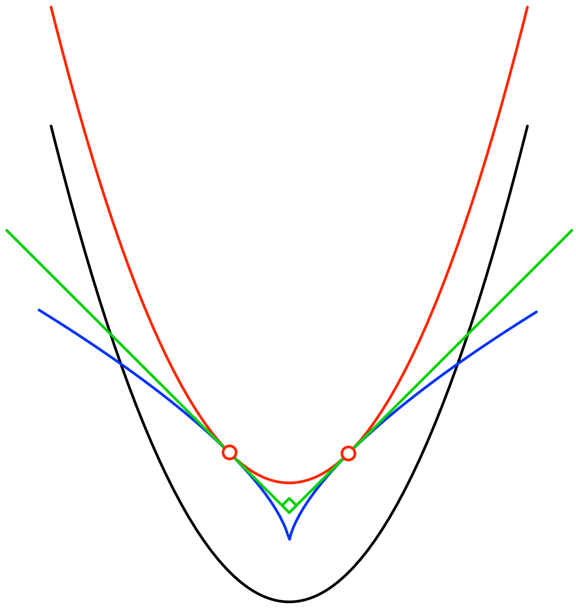

Abb. 2: Parabel

3.2 Ellipse

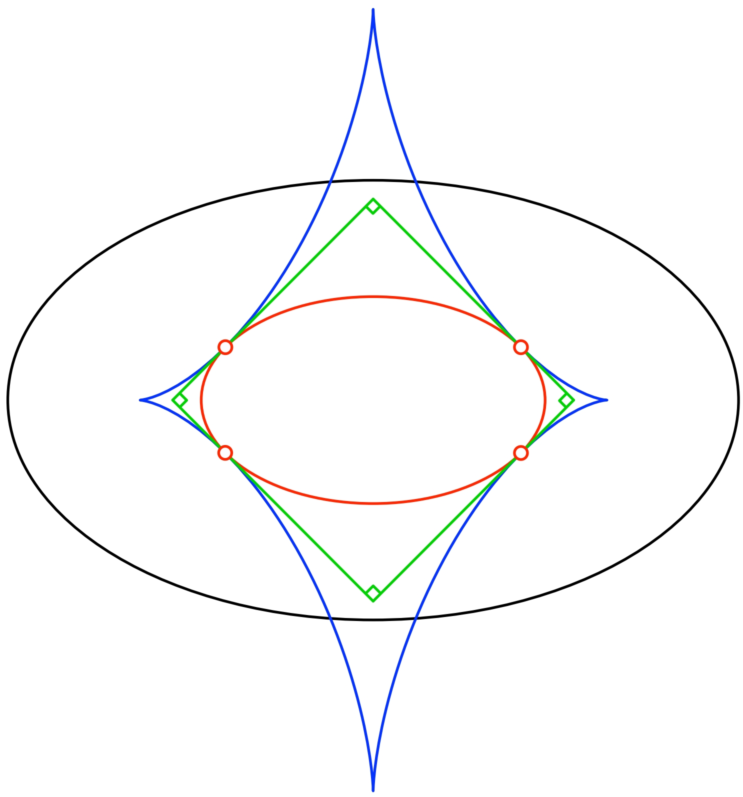

Abb. 3: Ellipse

3.3 Hyperbel

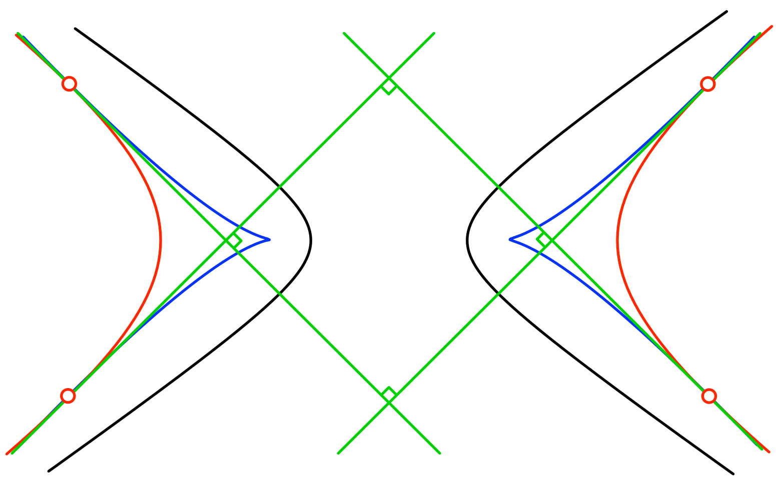

Abb. 4: Hyperbel

Die Abbildung 4 gilt für $a > b$. Was geschieht bei $a = b$? Was geschieht bei $a < b$?

4 Formeln

4.1 Parabel

Standardparabel:

$$y = x^2$$

Zugehörige Frégier-Parabel:

$$y = x^2 + 1$$

Evolute der Standardparabel:

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{27}{16} x^2$$

4.2 Ellipse

Ellipse mit den Halbachsen a und b:

$$\left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Verkleinerungsfaktor f für die Frégier-Ellipse:

$$f = \tfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Evolute der Ellipse:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

Was folgt für den Sonderfall des Kreises?

4.3 Hyperbel

Hyperbel mit den Halbachsen a und b:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Streckungsfaktor f für die Frégier-Hyperbel:

$$f = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Evolute der Hyperbel:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

Was folgt für den Sonderfall der gleichseitigen Hyperbel?

Literatur

Weiss, Gunter (2018): Thales-3D mit der Idee von M. Frégier. IBDG, Informationsblätter der Geometrie. 37. 2/2018. 30-37