Hans Walser, [20080111b]

Go West, Young Man

Ein Explorer konstruiert einen Polygonzug, indem er jeweils genau nach Westen visiert und auf der Visierlinie immer dieselbe Strecke a abträgt.

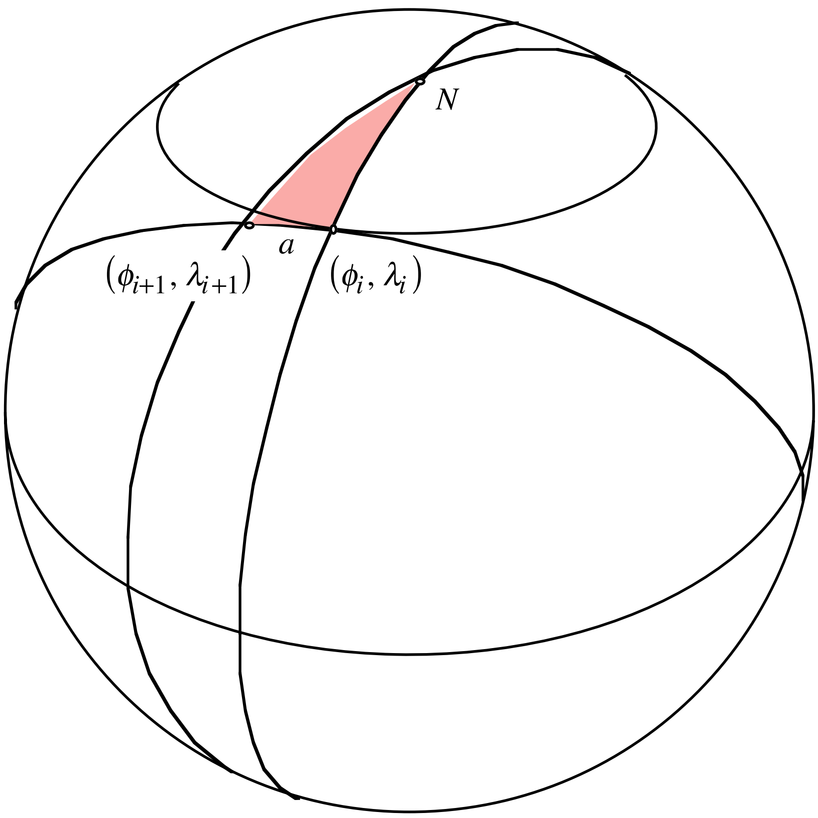
Wohin gelangt er schließlich?

Bearbeitung

Der Explorer bewegt sich *nicht* auf einen Breitenkreis.

Die folgenden Überlegungen gelten für einen Startpunkt (ϕ_0, λ_0) auf der nördlichen Halbkugel. Wenn der Explorer jeweils genau nach Westen visiert und auf der Visierlinie eine Strecke c abträgt, liegt diese Strecke auf einem Großkreis mit dem nördlichsten Punkt im Standort des Explorers. Der Explorer bewegt sich sukzessive nach Süden und nähert sich dem Äquator. Der sphärische Polygonzug ist aus Großkreisbögen zusammengesetzt.

Für den Schritt von (ϕ_i, λ_i) auf $(\phi_{i+1}, \lambda_{1+i})$ rechnen wir im sphärischen Dreieck mit diesen beiden Punkten und dem Nordpol.



Schritt

Dieses Dreieck ist rechtwinklig an der Ecke (ϕ_i, λ_i) des aktuellen Standortes des Explorers. Die eine Kathete ist a, die andere die Poldistanz $\vartheta_i = \frac{\pi}{2} - \phi_i$. Somit folgt aus dem „sphärischen Pythagoras“:

$$\cos(\vartheta_{i+1}) = \cos(a)\cos(\vartheta_i)$$
$$\sin(\phi_{i+1}) = \cos(a)\sin(\phi_i)$$

Für den Winkel α_{i+1} am Nordpol erhalten wir aus dem Seiten-Kosinus-Satz:

$$\cos(a) = \cos(\vartheta_i)\cos(\vartheta_{i+1}) + \sin(\vartheta_i)\sin(\vartheta_{i+1})\cos(\alpha_{i+1})$$

Also:

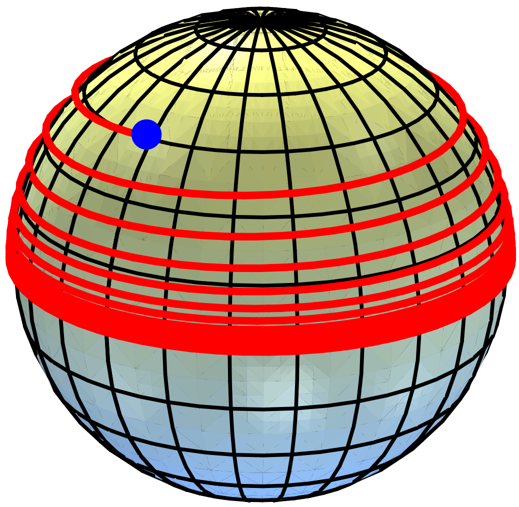
$$\cos(\alpha_{i+1}) = \frac{\cos(a) - \sin(\phi_i)\sin(\phi_{i+1})}{\cos(\phi_i)\cos(\phi_{i+1})}$$
$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \alpha_{i+1}$$

Das Minuszeichen darum, weil unser junger Mann westwärts geht.

Damit können wir die Eckpunkte des sphärischen Polygonzuges rekursiv berechnen.

Beispiele

Zunächst ein Beispiel auf der Einheitskugel. Für $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$, $a = 0.1$ und einer Kantenzahl $n = 1000$ ergibt sich nachfolgendes Bild.

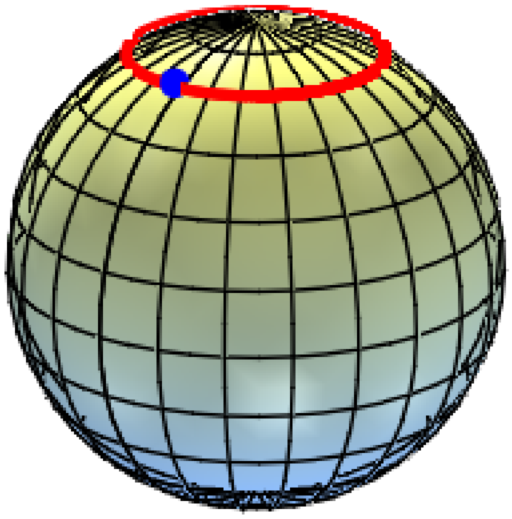


a = 0.1, n = 1000

Wir sehen, wie die Kurve asymptotisch gegen den Äquator läuft.

Das Beispiel ist allerdings nicht realistisch, weil a viel zu groß ist; die Visierlinie würde durch die Erdkrümmung unterbrochen. Bei einer Instrumentenhöhe von einem Meter haben wir einen Horizont von ca. 3.5 km. Wenn auch das Empfangsinstrument ein Meter über Boden ist, können wir mit einer Visierdistanz von max. 7 km arbeiten.

Einer Visierdistanz von 6.366 km entspricht auf der Einheitskugel $a = 0.001$. Im folgenden Beispiel ist $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$, $a = 0.001$ und $n = 3141$ (wow!).



***a* = 0.001, *n* = 3141**

Das sieht jetzt so aus, wie wenn unser junger Mann genau auf dem Breitenkreis um die Erde herumgegangen ist. In Wirklichkeit befindet er sich aber nach dem ersten Umgang etwa 17 km südlich des Ausgangspunktes.