Hans Walser, [20190421]

Goldberg

Idee: Patrik G. K. Wiesner, BSc ETHZ, Davidgasse 42, A - 1100 Wien

1 Worum geht es?

Beispiel einer Zerlegungsgleichheit eines gleichseitigen Dreieckes und eines regelmäßigen Fünfeckes (Abb. 1) nach Michael Goldberg (1952). Die Zerlegung benötigt sechs Teile. Kinematische Realisierung.

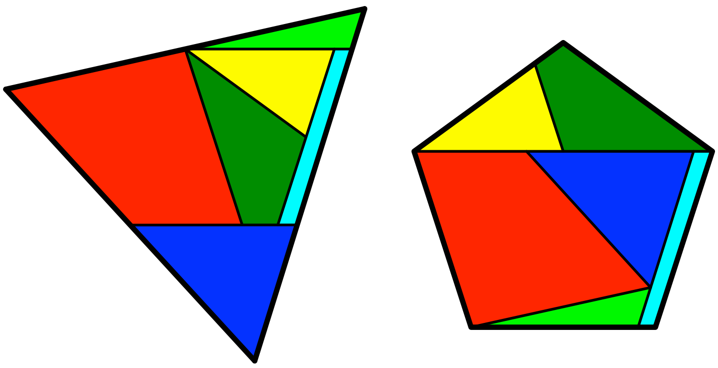

Abb. 1: Dreieck und regelmäßiges Fünfeck

2 Daten

Wir normieren die Flächen der beiden Polygone auf 1.

Für die Seitenlänge s_3 des Dreieckes erhalten wir damit:

$$s_3 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1.519671371 \tag{1}$$

Für die Seitenlänge s_5 des Fünfeckes erhalten wir:

$$s_5 = 2\sqrt{\tfrac{1}{5}\tan\left(\tfrac{\pi}{5}\right)} \approx 0.7623870552 \tag{2}$$

Das Seitenverhältnis ist:

$$\frac{s_3}{s_5} \approx 1.993306891 \tag{3}$$

Die Seitenlänge des Dreieckes ist also fast doppelt so groß wie jene des Fünfeckes. Allerdings darf man nicht mit dem Näherungswert 2 arbeiten, weil sonst die Zerlegung sichtbar ungenau wird (eigene Erfahrung).

3 Konstruktives Vorgehen

Wir beginnen mit dem regelmäßigen Fünfeck und zeichnen die horizontale Diagonale (Abb. 2a).

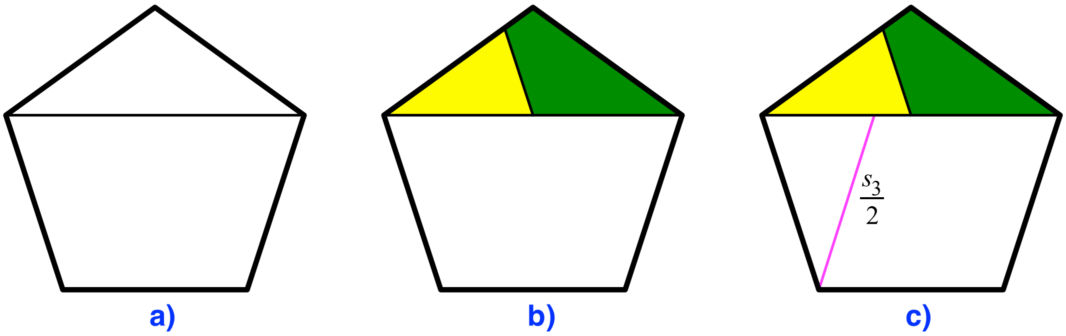

Abb. 2: Erste drei Schritte

Durch den Mittelpunkt dieser Diagonalen zeichnen wir eine Parallele zur linken Topfseite des Fünfeckes (Abb. 2b). Somit erhalten wir das gelbe und das dunkelgrüne Teilstück.

Bis jetzt haben wir uns ausschließlich in der Fünfeckgeometrie bewegt.

Nun kommt das Dreieck ins Spiel.

Wir tragen von der linken unteren Ecke des Fünfeckes aus die halbe Dreieckseite auf die Diagonale ab (Abb. 2c). Wegen (3) ist die entstehende Strecke (magenta) *nicht* parallel zur rechten Topfseite des Fünfeckes.

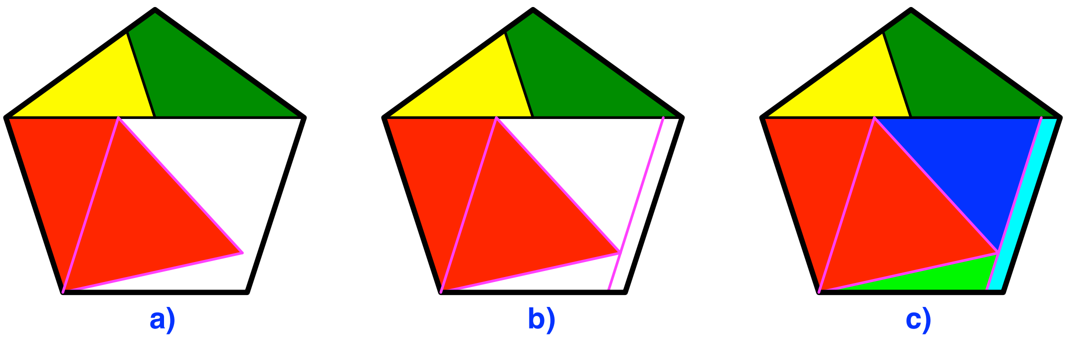

Abb. 3: Fortsetzung der Konstruktion

Die magenta Strecke ergänzen wir zum gleichseitigen Dreieck (Abb. 3a). So erhalten wir das rote Viereck.

Durch die Spitze des gleichseitigen Dreiecks zeichnen wir eine Parallele zur magenta Strecke (Abb. 3b). Wir haben an dieser Spitze jetzt drei Winkel von 60°. Diese werden in die Ecken des gleichseitigen Dreiecks kommen.

Wir können nun noch das dunkelblaue und das hellgrüne Dreieck sowie das hellblaue Viereck markieren. Das hellblaue Viereck ist dem Anschein zum Trotz kein Parallelogramm. Lediglich bei beiden kurzen Seiten sind parallel.

Die sechs Teile können nun gemäß Abbildung 1 ins gleichseitige Dreieck eingepasst werden.

4 Orientierungen

In der Abbildung 4 ist im Fünfeck zusätzlich zu den Farben eine senkrechte Schraffur angebracht worden.

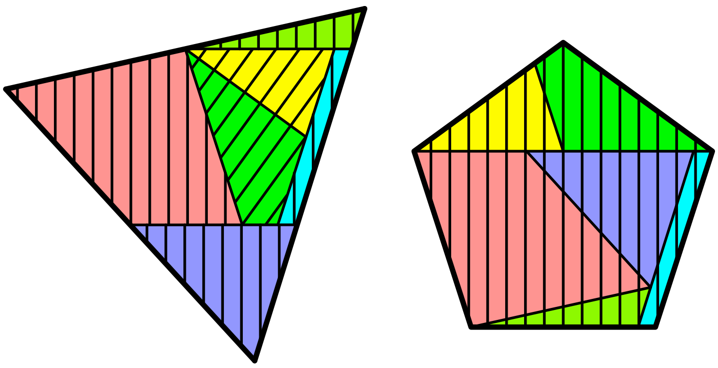

Abb. 4: Orientierungen

Die Teile werden nun unter Beibehaltung der Schraffur ins Dreieck eingepasst. Bei den Teilen, die sich im Fünfeck unterhalb der Diagonale befinden, ist die Schraffur nach wie vor senkrecht. Diese Teile werden also entweder verschoben (dunkelblau und hellgrün) oder um 180° gedreht (rot und himmelblau). Bei den beiden Teilen oberhalb der Fünfeckdiagonale (gelb und grün) kommt noch eine Verdrehung um ein Vielfaches von 36° dazu.

5 Kinematisches Modell

Der Übergang vom Fünfeck zum Dreieck und zurück lässt sich durch ein kinematisches Modell visualisieren. Dieses Modell geht auf Patrik G. K. Wiesner, BSc ETHZ, Davidgasse 42, A - 1100 Wien, zurück und ist patentiert.

Die Abbildung 5 zeigt die Startposition des Fünfeckes. Die beiden blauen, der gelbe und der grüne Punkt sind ortsfeste Drehpunkte. Die beiden roten Punkte sind Gelenkpunkte. Sie bilden zusammen mit den beiden blauen Punkten ein Parallelogramm. An den Parallelogrammseiten sind der Reihe nach das hellblaue, das dunkelblaue, das rote und das hellgrüne Teilstück befestigt. Sie drehen mit diesen Seiten. Im Detail heißt das, dass das hellgrüne Dreieck ortsfest bleibt, das hellblaue und das hellrote Viereck je um einen blauen Punkt drehen und das dunkelblaue Dreieck unter Beibehaltung der Orientierung (also ohne Verdrehen) herumschaukelt.

Das gelbe Dreieck dreht um den gelben Punkt, und zwar gegengleich zum Parallelogramm und nur mit einem Fünftel der Drehgeschwindigkeit.

Das dunkelgrüne Viereck dreht um den dunkelgrünen Punkt im gleichen Sinn wie das Parallelogramm, aber nur mit vier Fünfteln der Drehgeschwindigkeit.

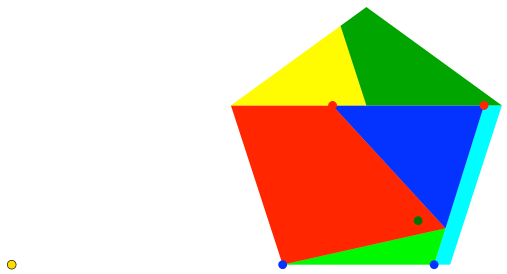

Abb. 5: Startposition

Die Abbildung 6 zeigt den kinematischen Prozess in Schritten von 30°.

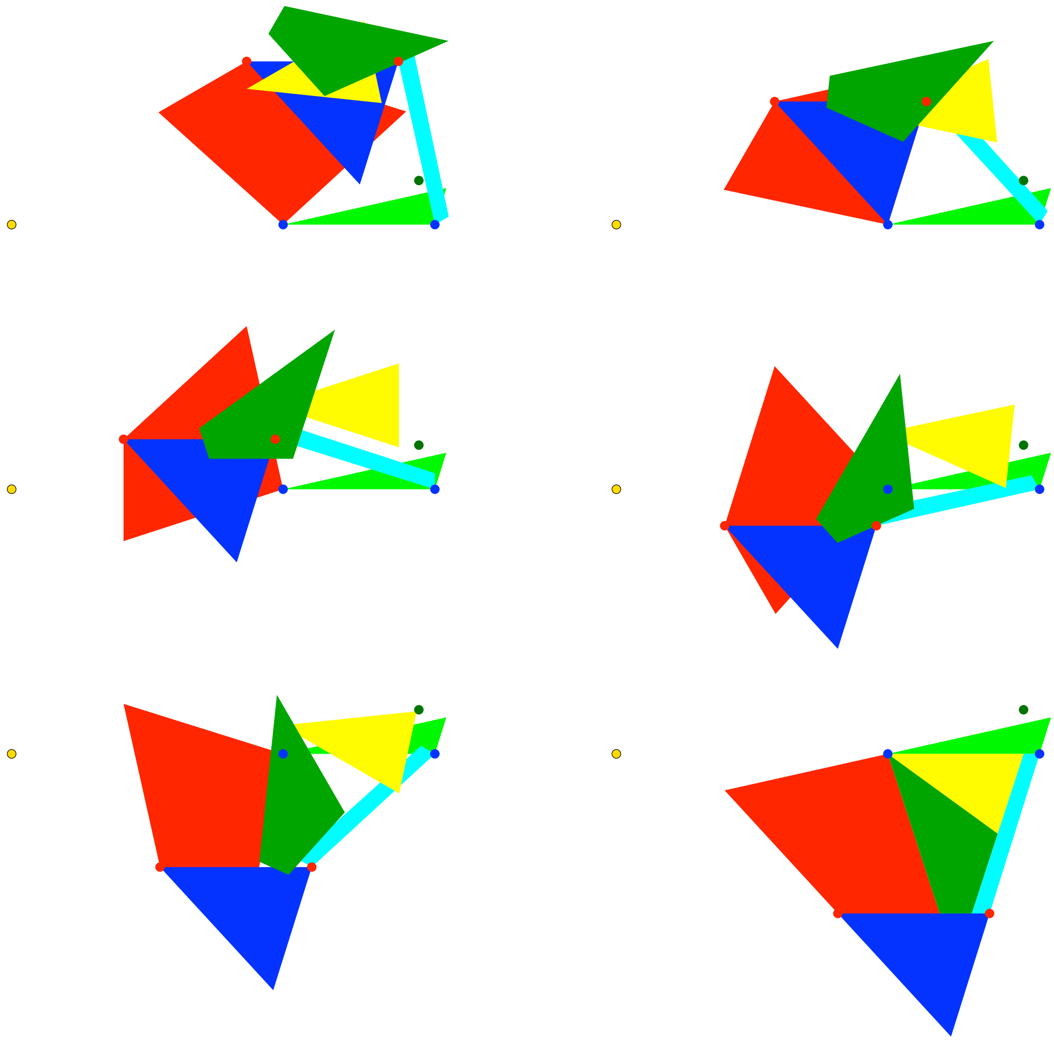

Abb. 6: Kinematik

Auf meiner Homepage findet sich eine GeoGebra-Animation (Animation3) dazu. Der Prozess geht hin und zurück. Man kann ihn auch endlos vorwärts laufen lassen, wegen der unterschiedlichen Drehgeschwindigkeiten dauert es dann ein bisschen, bis die Startposition wieder erreicht ist (Animation4).

Weitere Animationen hier.

Wie lässt sich dies mechanisch realisieren?

Weblinks

DITOH, Spezieller platonischer Körper
https://www.ditoh.com

Animationen
https://www.ditoh.com/dr-hans-walser-ethz-uni-basel

Hans Walser: Dudeney
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dudeney/Dudeney.htm

Hans Walser: Dudeney
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dudeney2/Dudeney2.htm

Hans Walser: Quadrat und Fünfeck
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrat_u_Fuenfeck/Quadrat_u_Fuenfeck.htm