

Hans Walser, [20200608]

Goldene Doppelspirale

1 Worum geht es?

Aus gleichseitigen Dreiecken konstruierte Doppelspirale (Abb. 1) mit einem Längenverkleinerungsfaktor im Umfeld des Goldenen Schnittes.

2 Die Doppelspirale



Abb. 1: Goldene Doppelspirale

Das Außenprofil der einen Spirale berührt das Innenprofil der anderen und umgekehrt. Die beiden Spiralen sind punktsymmetrisch.

3 Längen-Verkleinerungsfaktor

Wir berechnen den Längen-Verkleinerungsfaktor f beim Übergang von einem Dreieck zum nachfolgenden (Abb. 2).

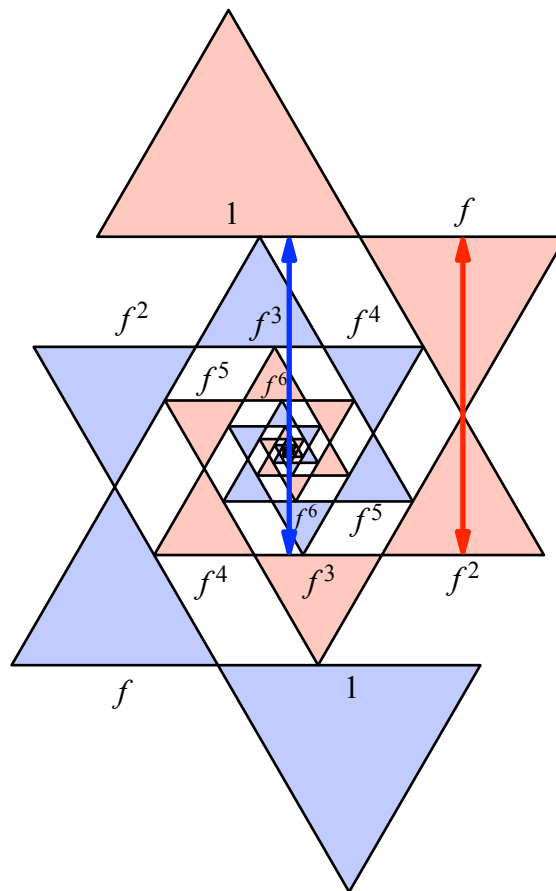


Abb.2: Vermaßung

Aus der Abbildung 2 lesen wir ab:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}(f + f^2) = \frac{1}{2}\sqrt{3}(f^3 + f^4 + f^5 + f^6) \quad (1)$$

Diese Gleichung sechsten Grades lässt sich mit schulischen Mitteln einfach lösen. Da die triviale Lösung $f = 0$ für uns nicht relevant ist, können wir (1) durch f dividieren und vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} 1 + f &= f^2 + f^3 + f^4 + f^5 \\ 1 + f &= (1 + f)(f^2 + f^4) \end{aligned} \quad (2)$$

Eine weitere Lösung ist somit $f = -1$. Diese ist für uns ebenfalls nicht relevant, sodass wir durch den entsprechenden Linearfaktor dividieren können. Dies ergibt:

$$1 = f^2 + f^4 \quad (3)$$

Aus dieser biquadratischen Gleichung ergibt sich:

$$f^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}} \quad (4)$$

Für reelle Lösungen für f ist in (4) nur die Plus-Lösung relevant. Mit der Schreibweise des Goldenen Schnittes (Walser 2013)

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (5)$$

ist also:

$$f^2 = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow f = \pm \sqrt{\frac{1}{\Phi}} \quad (6)$$

Wiederum ist nur die positive Lösung relevant, so dass wir schließlich haben:

$$f = \sqrt{\frac{1}{\Phi}} \approx 0.7862 \quad (7)$$

Dies rechtfertigt die Bezeichnung *Goldene Doppelspirale*.

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Websites

Hans Walser: Goldene Spirale

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/G/Goldene_Spirale/Goldene_Spirale.htm

Hans Walser: Goldene Spiralen

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/G/Goldene_Spiralen/Goldene_Spiralen.pdf

Hans Walser: Berührspiralen

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/B/Beruehrspiralen/Beruehrspiralen.htm

Hans Walser: Hexenspirale

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Hexenspirale2/Hexenspirale2.htm