Hans Walser, [20090703b]

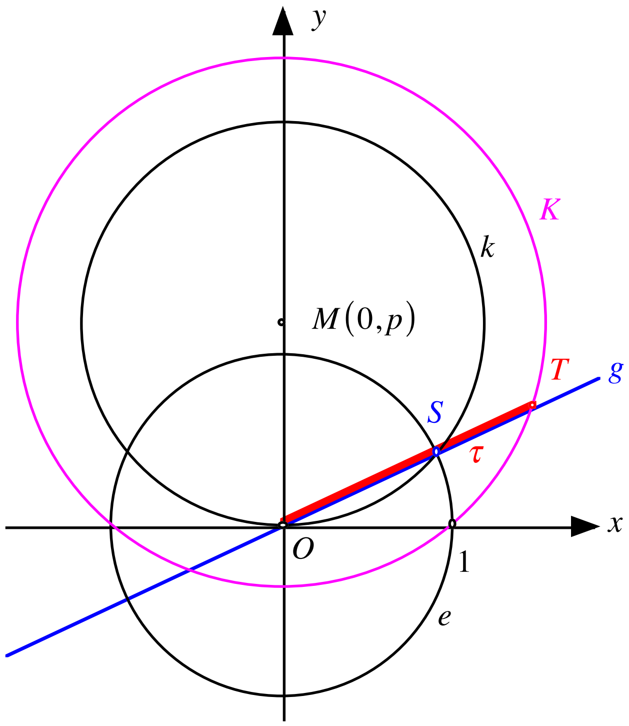
Eine Konstruktion des Goldenen Schnittes

Idee von J. N., S.

1 Worum es geht

Es wird eine Konstruktion des Goldenen Schnittes mit einem freien Parameter besprochen.

2 Konstruktionsbeschreibung



Konstruktion

Auf der y-Achse wählen wir einen beliebigen Punkt $M(0,p)$; p ist also ein freier Parameter für die Konstruktion. Für eine reelle Konstruktion muss $|p| \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$ sein.

Kreis k um M schneiden mit dem Einheitskreis e; Schnittpunkt S. Gerade g durch Ursprung O und S. Kreis K um M durch Einheitspunkt $(1,0)$ auf der x-Achse. Schnitt von K mit g gibt T. Die Strecke OT hat die Länge τ des Goldenen Schnittes.

3 Nachweis

Einheitskreis e:

$$e: \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Kreis k:

$$\begin{aligned} k: \qquad & x^2 + (y-p)^2 = p^2 \\ & x^2 + y^2 - 2py = 0 \end{aligned}$$

Schnittpunkt S:

$$\left.\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 1 \\ & x^2 + y^2 - 2py = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2py = 1$$

$$y = \tfrac{1}{2p}$$

$$x = \pm\sqrt{1 - \tfrac{1}{4p^2}}$$

Wir nehmen den positiven Wert und erhalten: $S\left(\sqrt{1-\frac{1}{4p^2}}, \frac{1}{2p}\right)$

Gerade g:

$$y = \frac{\frac{1}{2p}}{\sqrt{1-\frac{1}{4p^2}}}x = \frac{1}{\sqrt{4p^2-1}}x$$

Oder in anderer Darstellung:

$$x = y\sqrt{4p^2 - 1}$$

Radius R des Kreises K:

$$R^2 = 1 + p^2$$

Kreis K:

$$\begin{aligned} & x^2 + (y-p)^2 = 1 + p^2 \\ & x^2 + y^2 - 2py = 1 \end{aligned}$$

Schnittpunkt T mit der Geraden g:

$$\begin{aligned} \left(y\sqrt{4p^2-1}\right)^2 + y^2 - 2py &= 1 \\ y^2\left(4p^2-1\right) + y^2 - 2py &= 1 \\ 4p^2y^2 - 2py - 1 &= 0 \\ (2py)^2 - 2py - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung des goldenen Schnittes für $2py$. Es ist also (wir nehmen die positive Lösung):

$$2py = \tau = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \tfrac{\tau}{2p}$$

Weiter ist:

$$x = y\sqrt{4p^2 - 1} = \tfrac{\tau}{2p}\sqrt{4p^2 - 1}$$

Somit haben wir:

$$T\left(\tfrac{\tau}{2p}\sqrt{4p^2 - 1}, \tfrac{\tau}{2p}\right)$$

Für den Abstand vom Ursprung ergibt sich:

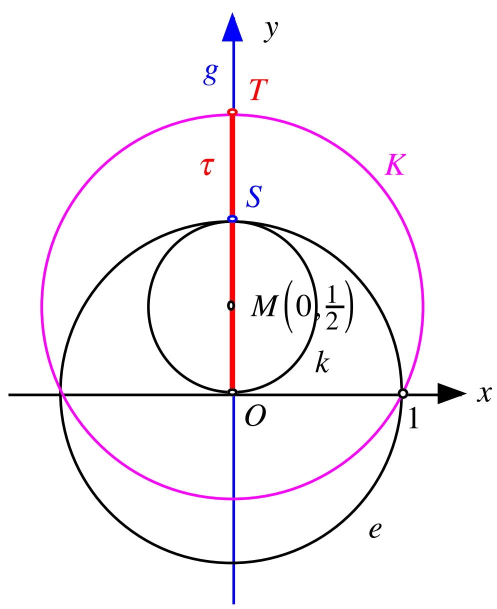
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{\tau}{2p}\sqrt{4p^2 - 1}\right)^2 + \left(\tfrac{\tau}{2p}\right)^2} = \tau\sqrt{\tfrac{4p^2-1+1}{4p^2}} = \tau$$

Dies war zu beweisen.

4 Sonderfälle

4.1 $p = \frac{1}{2}$

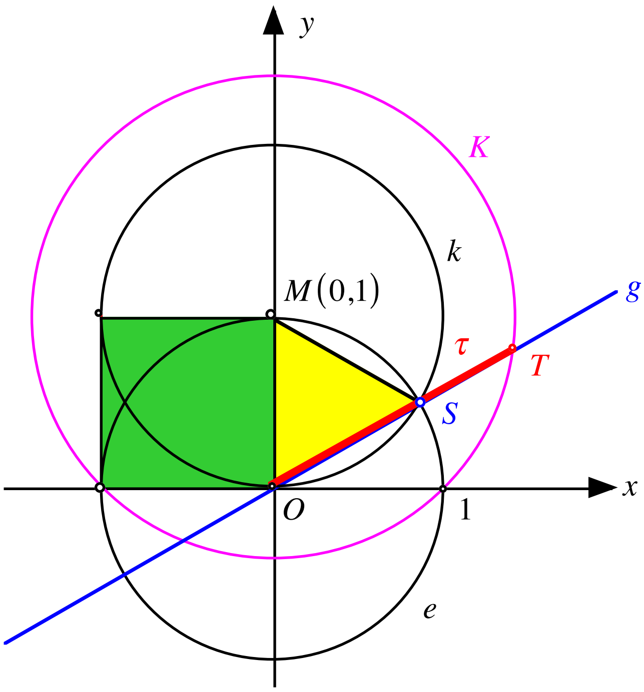
Für $p = \frac{1}{2}$ fällt die Gerade g mit der y-Achse zusammen und wir erhalten eine klassische Konstruktion. Der kleine Kreis k ist nur zur Verdeutlichung eingezeichnet, für die Konstruktion ist er nicht erforderlich.



Klassische Konstruktion für $p = \frac{1}{2}$

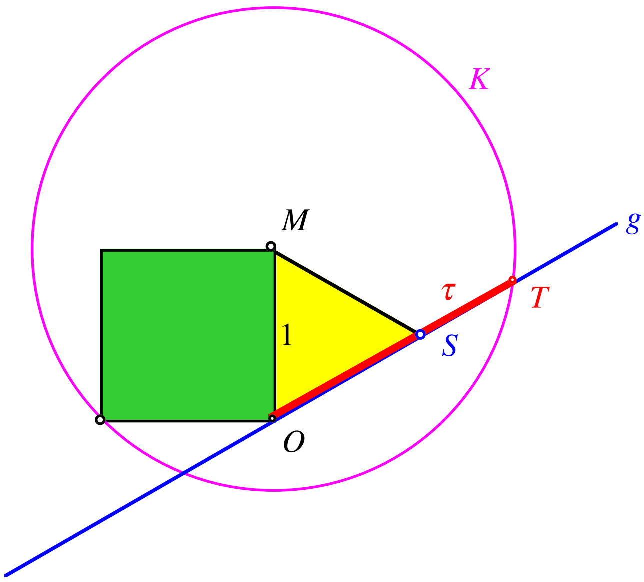
4.2 $p = 1$

Die Figur lässt sich mit einem Quadrat und einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlängen 1 ergänzen.



Konstruktion für $p = 1$

Damit kann die Konstruktion einfacher dargestellt werden.



Vereinfachte Darstellung