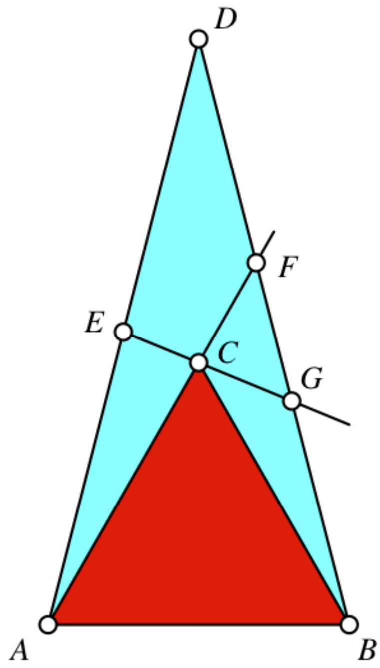
Hans Walser, [20120708]

Goldener Schnitt mit zwei Dreiecken

Idee: J. N.

1 Die beiden Dreiecke

Wir zeichnen ein gleichseitiges Dreieck ABC und ein gleichschenkliges Dreieck ABD, dessen Schenkel doppelt so lang sind wie die Basis AB. E ist der Mittelpunkt des Schenkels AD.



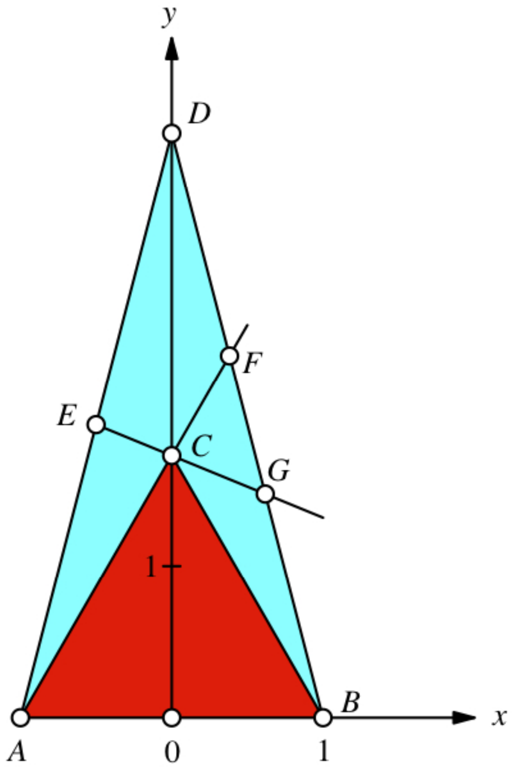
Die beiden Dreiecke

Die Gerade AC schneidet den Schenkel DB im Punkt F, die Gerade EC schneidet diesen Schenkel im Punkt G.

Die beiden Punkte F und G teilen den Schenkel BD je im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

2 Beweis

Wir verwenden ein Koordinatensystem gemäß Abbildung.



Koordinaten

Zunächst ergeben sich die Koordinaten:

$$A(-1,0),\, B(1,0),\, C\left(0,\sqrt{3}\right),\, D\left(0,\sqrt{15}\right),\, E\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

Für das Verhältnis des Goldenen Schnittes verwenden wir die Schreibweise:

$$\phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

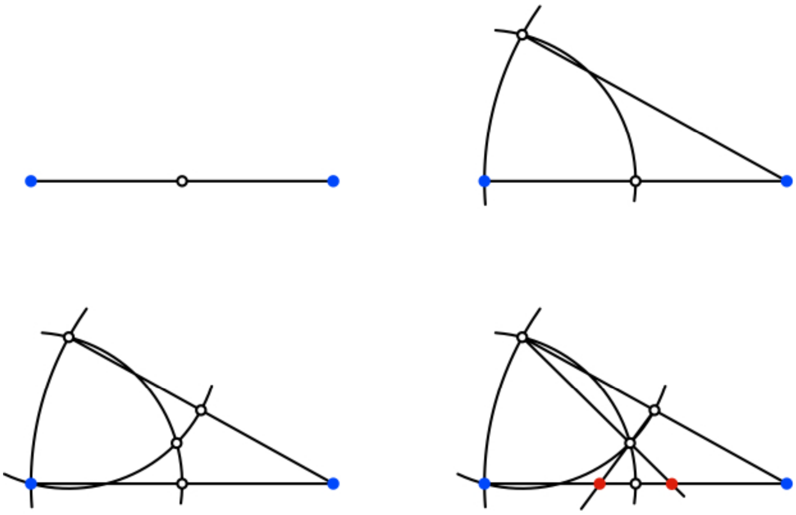
Mit einiger Rechnung ergeben sich für *F* und *G* die Koordinaten:

$$F\left(\left(\tfrac{1}{\phi}\right)^2, \sqrt{3}\left(\left(\tfrac{1}{\phi}\right)^2 + 1\right)\right), \quad G\left(\tfrac{1}{\phi}, \sqrt{15}\left(\tfrac{1}{\phi}\right)^2\right)$$

Für den Nachweis des Goldnen Schnittes genügen die x-Koordinaten der Punkte *D, F, G, B*. Diese sind $0, \left(\tfrac{1}{\phi}\right)^2, \tfrac{1}{\phi}, 1$. Dies war zu beweisen.

3 Konstruktionen

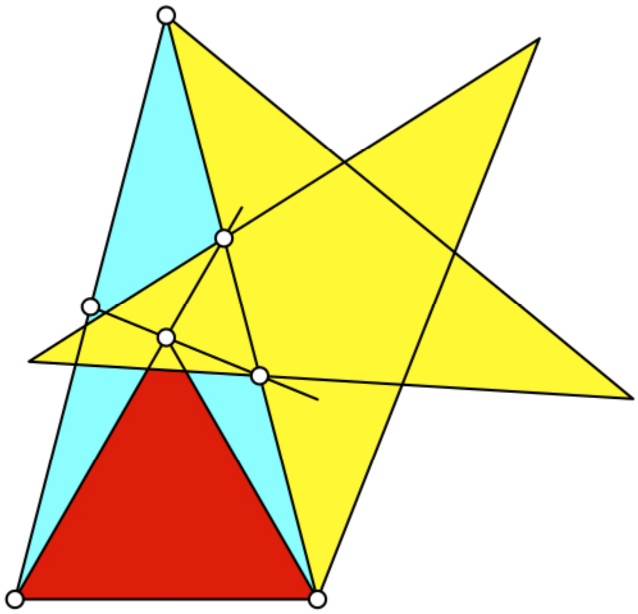
Damit ergeben sich die in der Abbildung angedeuteten beiden Konstruktionswege für den Goldenen Schnitt.



Konstruktionen

4 Pentagramm

Die Teilverhältnisse auf dem Schenkel *BD* sind dieselben wie beim Pentagramm.



Pentagramm

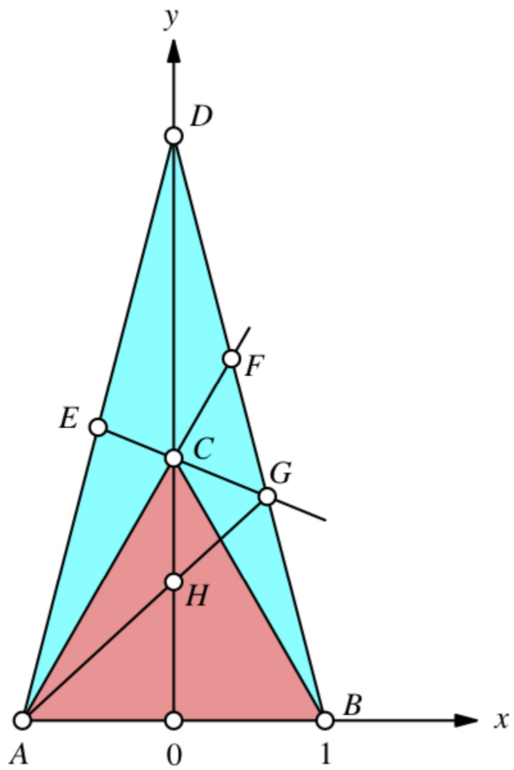
5 Ergänzungen

Wir erhalten weiter folgende Verhältnisse:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \phi^2, \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{EC}} = \frac{2}{\phi}$$

Die Gerade AG schneide die y-Achse im Punkt H. Der Punkt H teilt die Strecke AG im Verhältnis des Goldenen Schnittes:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HG}} = \phi$$



Noch ein Punkt