Hans Walser, [20190728]

Herzkurve

1 Worum geht es?

Kreisüberlagerungen führen zu einer Herzkurve. Es handelt sich nicht um die übliche Kardioide, sondern um die in [4] beschriebene Herzkurve.

2 Kreisüberlagerungen

Wir arbeiten mit der Figurenfolge

$$K_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(kt) \end{bmatrix}, \quad t \in (-\pi,\pi] \tag{1}$$

Es handelt sich dabei um eine Überlagerung von n Kreisen. Die Abbildungen 1 geben die Beispiele für $n = 1, \ldots, 5$.

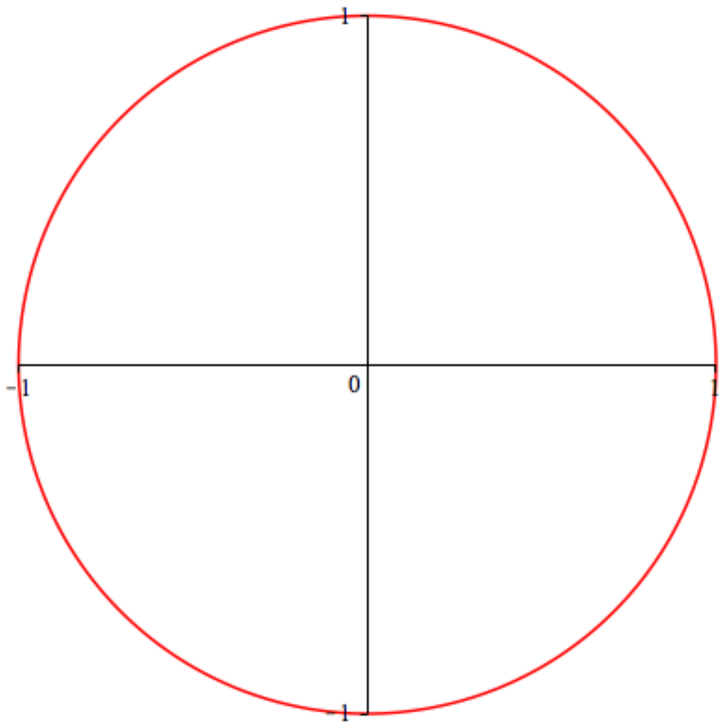

Abb. 1.1 n = 1, Kreis

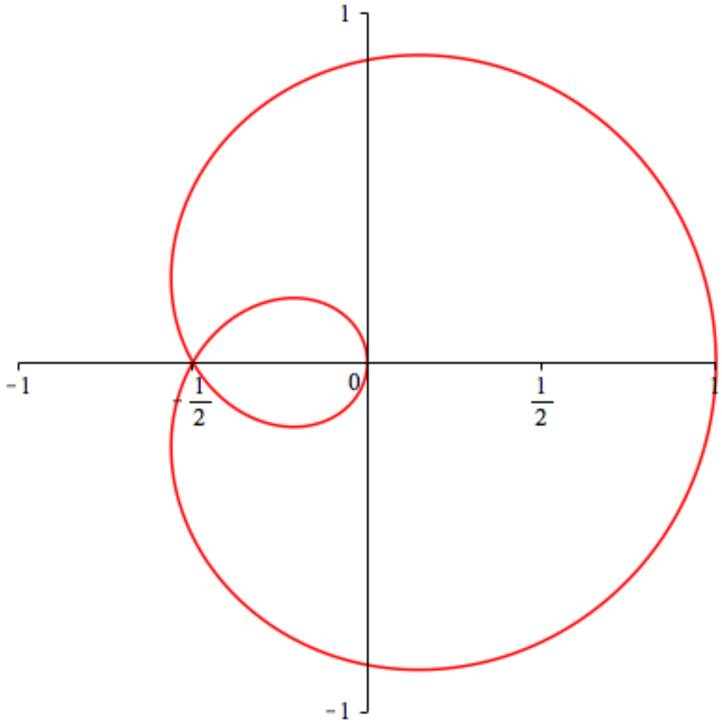

Abb. 1.2: n = 2

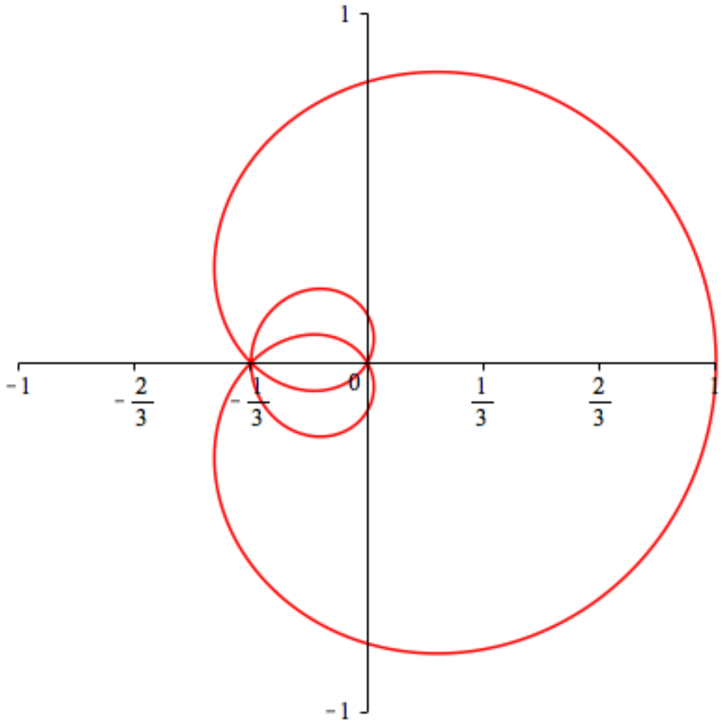

Abb. 1.3: n = 3

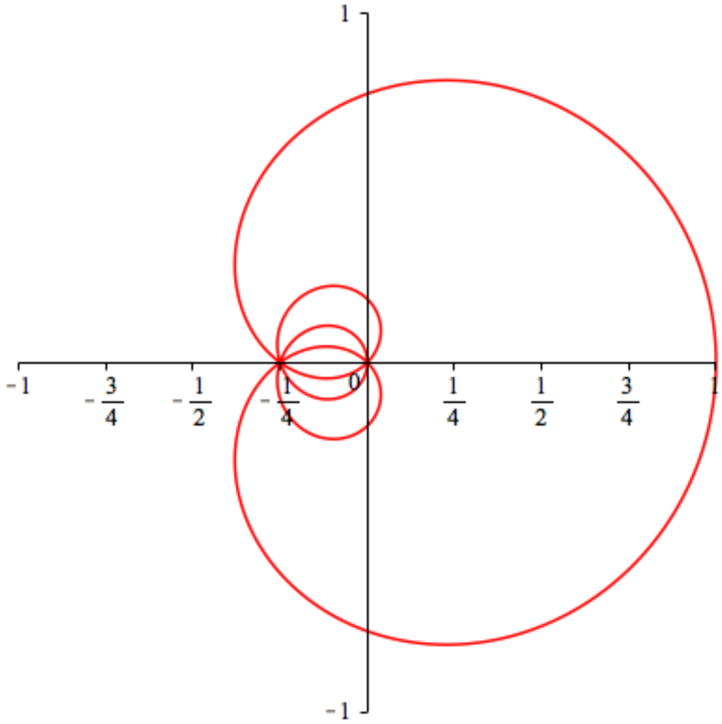

Abb. 1.4: *n* = 4

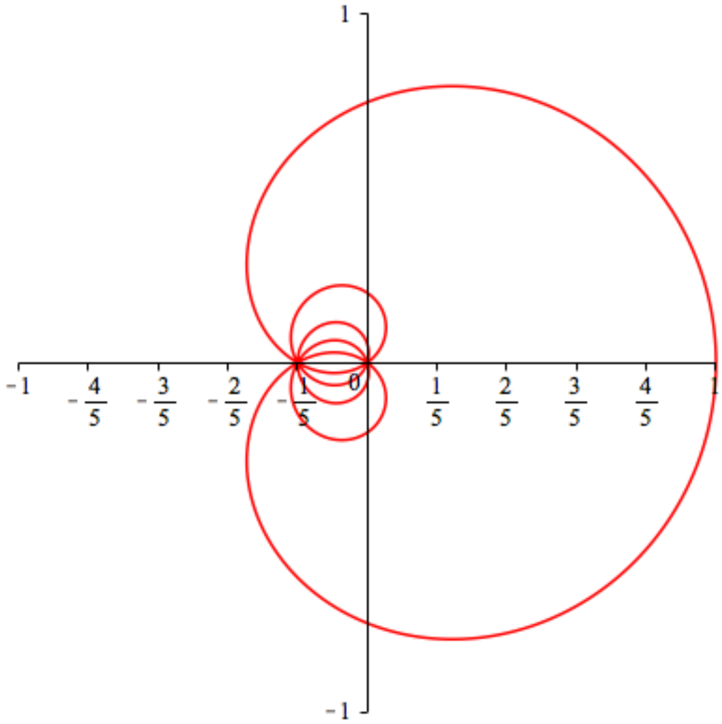

Abb. 1.5: *n* = 5

Auf Grund der Beispiele vermuten wir:

Die Kurve verläuft n Mal durch den Punkt $\left(-\frac{1}{n},0\right)$ und $n-1$ Mal durch den Ursprung.

Für $t=0$ verläuft sie durch den Punkt $\left(1,0\right)$.

3 Parameterwerte der Mehrfachpunkte

Die Parameterwerte der Mehrfachpunkte ergeben sich durch:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(kt\right)=0 \tag{2}$$

Wir suchen also die Nullstellen der Funktion:

$$y\left(t\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(kt\right), \quad t\in\left(-\pi,\pi\right] \tag{3}$$

Die Abbildungen 2 geben in rot die Funktionsgrafen für n = 1, ... , 5. In blau sind die Funktionsgrafen von

$$x\left(t\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kt\right), \quad t\in\left(-\pi,\pi\right] \tag{4}$$

eingetragen und in grün die Linie auf dem Niveau $-\frac{1}{n}$.

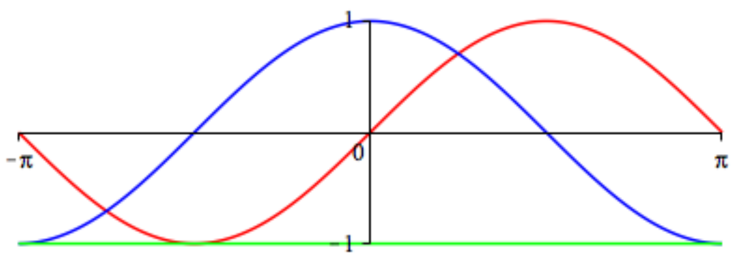

Abb. 2.1: n = 1, Sinuskurve

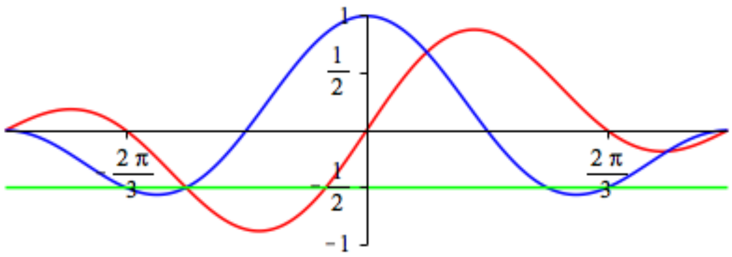

Abb. 2.2: n = 2

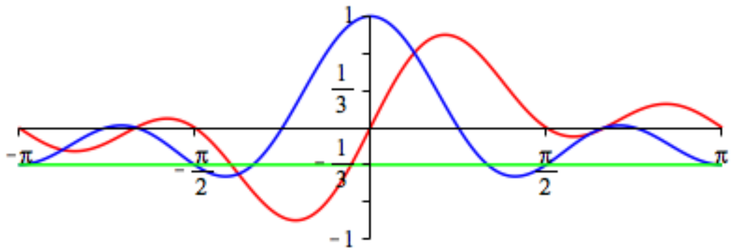

Abb. 2.3: n = 3

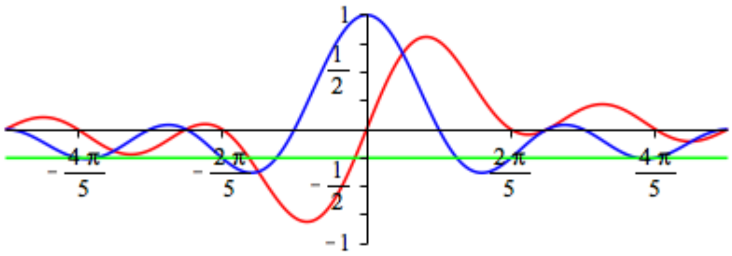

Abb. 2.4: n = 4

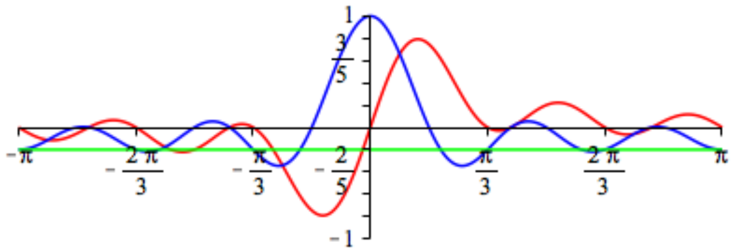

Abb. 2.5: n = 5

Aus den Funktionsgrafen lesen wir zunächst die Nullstellen

$$t = k\frac{2\pi}{n+1}, \quad k = -\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \tag{5}$$

ab. Diese Nullstellen sind trivial, wie am Einheitskreis überlegt werden kann. Weiter ist an diesen Stellen

$$x(t) = -\frac{1}{n} \tag{6}$$

Dies kann ebenfalls am Einheitskreis überlegt werden (die „Eins“ fehlt). Dieser Sachverhalt wird auch in den Abbildung 2 illustriert. Somit gehören mit Ausnahme von $t = 0$ diese Nullstellen als Parameterwerte der Kurve zum Punkt $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$.

Spannend sind nun die anderen Nullstellen. Diese gehören als Parameterwerte der Kurve zum Ursprung. Wir haben das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(kt) = 0 \end{array}\right\} \quad t \in (-\pi, \pi] \tag{7}$$

zu lösen (vgl. dazu die Abbildungen 2.2 bis 2.5). Wir erhalten die Lösungen:

$$t = k\frac{2\pi}{n}, \quad k = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \ldots, -1, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, k \neq 0 \tag{8}$$

Dies kann ebenfalls am Einheitskreis eingesehen werden. Die Abbildungen 3 illustrieren den Sachverhalt.

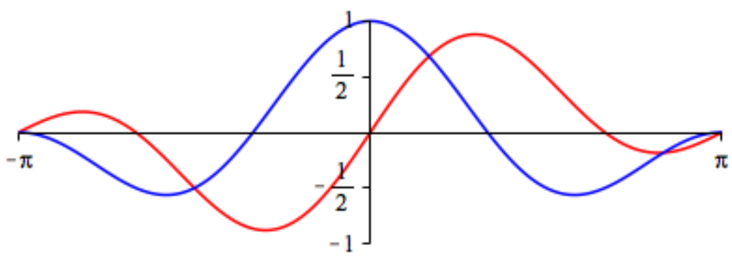

Abb. 3.2: n = 2

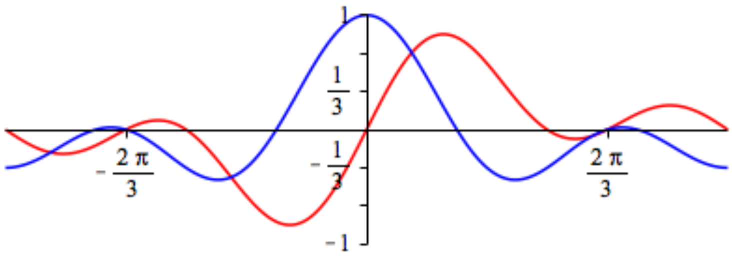

Abb. 3.3: *n* = 3

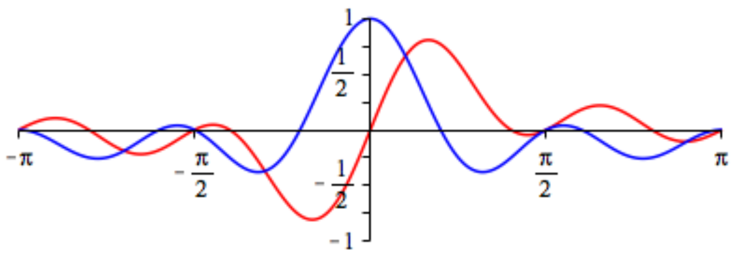

Abb. 3.4: *n* = 4

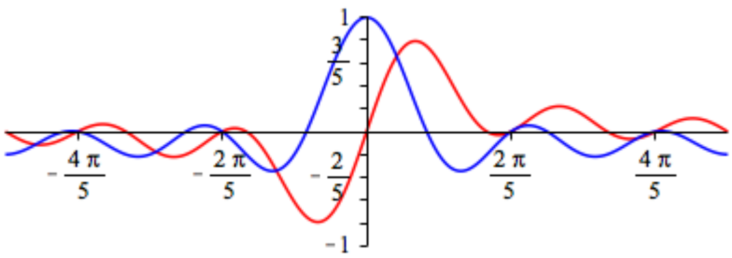

Abb. 3.5: *n* = 5

4 Und nun die Herzkurve

Für $n \to \infty$ nähern sich die Kurven der Abbildungen 1 (bis auf einen Skalierungsfaktor) der Herzkurve von [4] an. Diese kann dargestellt werden in der Form:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t}\sin(t)\cos(t) \\ \frac{1}{t}\sin(t)\cos(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi] \tag{9}$$

Die Abbildung 4 zeigt zwei Beispiele. In Blau ist die Herzkurve von [4] eingetragen.

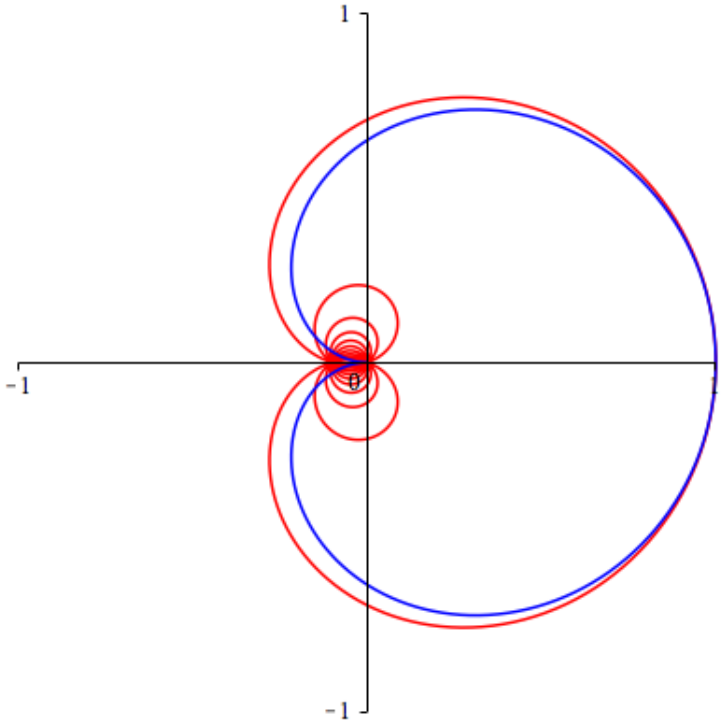

Abb. 4.1: n = 10

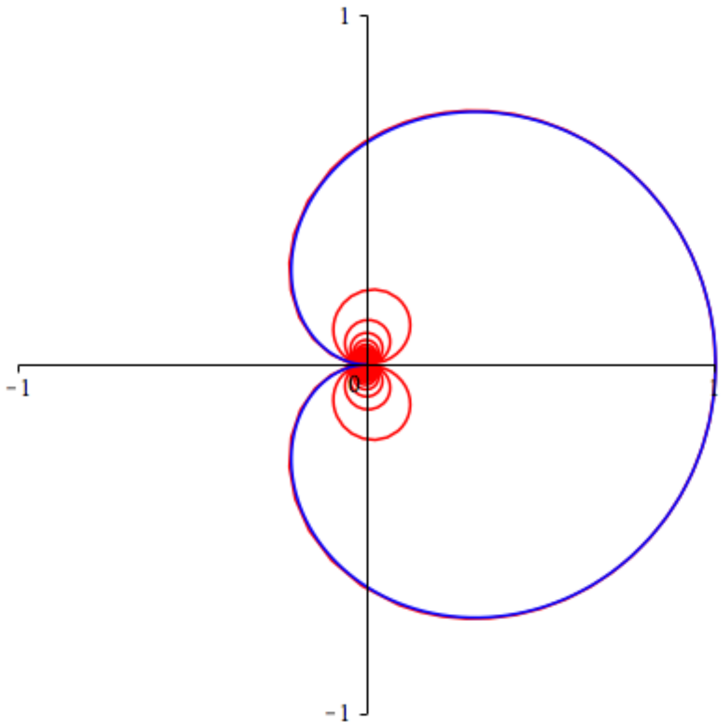

Abb. 4.2: n = 100

Die Abbildung 5 zeigt das Herz (für $n = 100$) in der üblichen Darstellung.

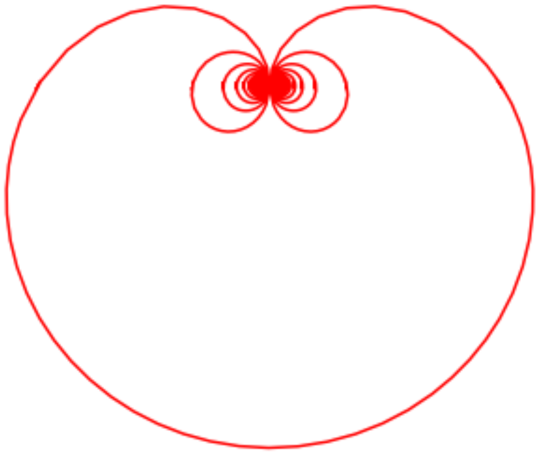

Abb. 5: Herzkurve

Websites

[1] Hans Walser: Herzkurve
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve/Herzkurve.htm

[2] Hans Walser: Herzkurve
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve2/Herzkurve2.htm

[3] Hans Walser: Herzkurve
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve3/Herzkurve3.htm

[4] Hans Walser: Herzkurve
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve4/Herzkurve4.htm

[5] Hans Walser: Die Herzkurve und die Möndchen des Hippokrates
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve_u_Hippokrates/Herzkurve_u_Hippokrates.htm

[6] Hans Walser: Herzkurven
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurven/Herzkurven.htm