Hans Walser, [20181104]

Hinkende Parität

1 Worum geht es?

Es wird ein Beispiel mit hinkender Symmetrie besprochen.

Auflistung von Daten.

Der Hintergrund ist eine Verallgemeinerung der Fibonacci-Folge und des Goldenen Schnittes.

2 Die Matrizen

Mit T_n bezeichnen wir die $n \times n$-Dreiecksmatrix, welche in der Nebendiagonalen (also von links unten nach rechts oben) sowie oberhalb davon mit Einsen gefüllt ist und unterhalb mit Nullen. (1) gibt die ersten Beispiele.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

3 Determinanten

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Determinanten der Matrizen T_n.

n	$\det(T_n)$	$\det(T_n)$
1	1	1
2	–1	–1
3	–1	–1
4	1	1
5	1	1
6	–1	–1
7	–1	–1
8	1	1
9	1	1
10	–1	–1

Tab. 1: Determinanten

Wir haben nicht einfach ein alternierendes Vorzeichen, sondern ein altalternierendes Vorzeichen.
Allgemein lässt sich das Vorzeichen mit verschiedenen Formeln bestimmen:

$$\det\left(T_n\right) = \operatorname{sign}\left(\left(\left(n+2\right) \bmod 4\right) - 1.5\right) = \sqrt{2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4}\right) = \Re\left(\left(\mathrm{i}+1\right)\mathrm{i}^{n-1}\right) \tag{2}$$

Beweis induktiv (Entwickeln nach der untersten Zeile).

4 Charakteristisches Polynom

Mit E_n als $n \times n$-Einheitsmatrix definieren wir das charakteristische Polynom:

$$p_n\left(x\right) = \det\left(T_n - xE_n\right) \tag{3}$$

Die Anordnung (4) gibt die ersten 10 charakteristischen Polynome.

$$\begin{array}{c}
1-x \\
-1-x+x^2 \\
-1+x+2x^2-x^3 \\
1+x-3x^2-2x^3+x^4 \\
1-x-4x^2+3x^3+3x^4-x^5 \\
-1-x+5x^2+4x^3-6x^4-3x^5+x^6 \\
-1+x+6x^2-5x^3-10x^4+6x^5+4x^6-x^7 \\
1+x-7x^2-6x^3+15x^4+10x^5-10x^6-4x^7+x^8 \\
1-x-8x^2+7x^3+21x^4-15x^5-20x^6+10x^7+5x^8-x^9 \\
-1-x+9x^2+8x^3-28x^4-21x^5+35x^6+20x^7-15x^8-5x^9+x^{10}
\end{array} \tag{4}$$

4.1 Koeffizienten

Die Koeffizienten kommen uns bekannt vor. Das Koeffizientendreieck besteht bis auf Vorzeichen aus zwei Pascalschen Dreiecken der Binomialkoeffizienten.

$$\begin{gathered}
1-1x\\
-1-1x+1x^2\\
-1+1x+2x^2-1x^3\\
1+1x-3x^2-2x^3+1x^4\\
1-1x-4x^2+3x^3+3x^4-1x^5\\
-1-1x+5x^2+4x^3-6x^4-3x^5+1x^6\\
-1+1x+6x^2-5x^3-10x^4+6x^5+4x^6-1x^7\\
1+1x-7x^2-6x^3+15x^4+10x^5-10x^6-4x^7+1x^8\\
1-1x-8x^2+7x^3+21x^4-15x^5-20x^6+10x^7+5x^8-1x^9\\
-1-1x+9x^2+8x^3-28x^4-21x^5+35x^6+20x^7-15x^8-5x^9+1x^{10}
\end{gathered}\tag{5}$$

In (5) sind die Koeffizienten der geraden Potenzen rot markiert. In den in der Abbildung 1 markierten Schrägzeilen stehen nun die Binomialkoeffizienten.

$$\begin{gathered}
1-1x\\
-1-1x+1x^2\\
-1+1x+2x^2-1x^3\\
1+1x-3x^2-2x^3+1x^4\\
1-1x-4x^2+3x^3+3x^4-1x^5\\
-1-1x+5x^2+4x^3-6x^4-3x^5+1x^6\\
-1+1x+6x^2-5x^3-10x^4+6x^5+4x^6-1x^7\\
1+1x-7x^2-6x^3+15x^4+10x^5-10x^6-4x^7+1x^8\\
1-1x-8x^2+7x^3+21x^4-15x^5-20x^6+10x^7+5x^8-1x^9\\
-1-1x+9x^2+8x^3-28x^4-21x^5+35x^6+20x^7-15x^8-5x^9+1x^{10}
\end{gathered}$$

Abb. 1: Binomialkoeffizienten

Analog für die nicht rot markierten Koeffizienten der ungeraden Potenzen.

Die Koeffizienten $b_{n,k}$ von (4) und (5) mit $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ und $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ können wie folgt berechnet werden:

$$b_{n,k} = \operatorname{sign}\left(\left(\left(n+k+2\right) \bmod 4\right) - 1.5\right) \binom{\left\lfloor n - \frac{k}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \tag{6}$$

Mit dem Abrundungszeichen in den Binomialkoeffizienten in (6) schaffen wir die Fallunterscheidung zwischen geraden und ungeraden Potenzen.
Das Schema der Abbildung 2 zeigt die ersten Koeffizienten.

$$\begin{array}{c}
1, -1 \\
-1, -1, 1 \\
-1, 1, 2, -1 \\
1, 1, -3, -2, 1 \\
1, -1, -4, 3, 3, -1 \\
-1, -1, 5, 4, -6, -3, 1 \\
-1, 1, 6, -5, -10, 6, 4, -1 \\
1, 1, -7, -6, 15, 10, -10, -4, 1 \\
1, -1, -8, 7, 21, -15, -20, 10, 5, -1 \\
-1, -1, 9, 8, -28, -21, 35, 20, -15, -5, 1
\end{array}$$

Abb. 2: Koeffizientenschema

4.1.1 Zeilensummen

Die Zeilensummen der Koeffizienten erhalten wir, indem wir in den charakteristischen Polynomen den Wert $x = 1$ einsetzen. Dies liefert die Werte der Tabelle 2.

n	Zeilen-summe	n	Zeilen-summe	n	Zeilen-summe	n	Zeilen-summe
1	0	7	0	13	0	19	0
2	–1	8	1	14	–1	20	1
3	1	9	–1	15	1	21	–1
4	–2	10	2	16	–2	22	2
5	1	11	–1	17	1	23	–1
6	–1	12	1	18	–1	24	1

Tab. 2: Zeilensummen

Wir erhalten nur wenige Werte für die Zeilensummen (im Unterschied zu den Zeilensummen 2^n im Pascalschen Dreieck der Binomialkoeffizienten). Die Zeilensummen sind periodisch mit der Periodenlänge 12 und antiperiodisch mit der Periodenlänge 6.

4.1.2 Alternierende Zeilensummen

Für die alternierende Zeilensumme ergibt sich ein analoges Bild (Tab. 3). Wir haben lediglich eine Phasenverschiebung um 3.

n	Alter-nierende Zeilen-summe	n	Alter-nierende Zeilen-summe	n	Alter-nierende Zeilen-summe	n	Alter-nierende Zeilen-summe
1	2	7	–2	13	2	19	–2
2	1	8	–1	14	1	20	–1
3	1	9	–1	15	1	21	–1
4	0	10	0	16	0	22	0
5	–1	11	1	17	–1	23	1
6	–1	12	1	18	–1	24	1

Tab. 3: Alternierende Zeilensummen

4.2 Beträge der Koeffizienten

Wegen (6) gilt für die Beträge $c_{n,k}$:

$$c_{n,k} = \left| b_{n,k} \right| = \binom{\left\lfloor n - \frac{k}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \tag{7}$$

Die Abbildung 3 enthält die Beträge der Koeffizienten der Abbildung 2.

$$\begin{array}{c}
1, 1 \\
1, 1, 1 \\
1, 1, 2, 1 \\
1, 1, 3, 2, 1 \\
1, 1, 4, 3, 3, 1 \\
1, 1, 5, 4, 6, 3, 1 \\
1, 1, 6, 5, 10, 6, 4, 1 \\
1, 1, 7, 6, 15, 10, 10, 4, 1 \\
1, 1, 8, 7, 21, 15, 20, 10, 5, 1 \\
1, 1, 9, 8, 28, 21, 35, 20, 15, 5, 1
\end{array}$$

Abb. 3: Beträge der Koeffizienten

Es gilt die Rekursionsformel:

$$c_{n,k} = c_{n-2,k-2} + c_{n-1,k} \tag{8}$$

Wir sehen in dieser Rekursionsformel nochmals das Zerfallen in einen Teil mit geradem k und einen Teil mit ungeradem k.
Für die Zeilensummen erhalten wir:

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \tag{9}$$

Dies sind die Fibonacci-Zahlen (Walser 2012).
Für die alternierenden Zeilensummen erhalten wir:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \tag{10}$$

Dies sind ebenfalls die Fibonacci-Zahlen.

5 Eigenwerte

Die Nullstellen der charakteristischen Polynome (4) sind die Eigenwerte der Matrizen T_n.

5.1 Eigenwert für $n = 1$

Für $n = 1$ erhalten wir den Eigenwert 1.

5.2 Eigenwerte für $n = 2$

Wir erhalten die beiden Eigenwerte –0.6180339887 und 1.618033989. Das ist der Goldene Schnitt (Walser 2013). Die Summe der Eigenwerte ist 1, das Produkt –1.

5.3 Eigenwerte für $n = 3$

Wir erhalten die drei Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–0.8019377358
2	0.5549581321
3	2.246979604

Tab. 4.3: Eigenwerte für *n* = 3

Die Summe der Eigenwerte ist 2, das Produkt –1.

5.4 Eigenwerte für $n = 4$

Wir erhalten die vier Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–1
2	–0.5320888862
3	0.6527036447
4	2.879385242

Tab. 4.4: Eigenwerte für $n = 4$

Bemerkenswert der Eigenwert -1.
Die Summe der Eigenwerte ist 2, das Produkt 1.

5.5 Eigenwerte für $n = 5$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–1.203615624
2	–0.5943511444
3	0.5211085581
4	0.7635211184
5	3.513337092

Tab. 4.5: Eigenwerte für $n = 5$

Die Summe der Eigenwerte ist 3, das Produkt 1.

5.6 Eigenwerte für $n = 6$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–1.410020048
2	–0.6679930799
3	–0.5149639155
4	0.5646807809
5	0.8801813576
6	4.148114905

Tab. 4.6: Eigenwerte für $n = 6$

Die Summe der Eigenwerte ist 3, das Produkt –1.

5.7 Eigenwerte für $n = 7$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–1.618033989
2	–0.7472382749
3	–0.5473181393
4	0.5111702974
5	0.6180339887
6	1
7	4.783386117

Tab. 4.7: Eigenwerte für $n = 7$

Bemerkenswert die Eigenwerte Nr. 1 und 5 (Goldener Schnitt) sowie der Eigenwert Nr. 6 mit dem Wert 1.

Die Summe der Eigenwerte ist 4, das Produkt –1.

5.8 Eigenwerte für $n = 8$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–1.827064741
2	–0.8296901137
3	–0.5880850656
4	–0.5086609188
5	0.5362089982
6	0.6765818224
7	1.121734294
8	5.418975724

Tab. 4.8: Eigenwerte für $n = 8$

Die Summe der Eigenwerte ist 4, das Produkt 1.

5.9 Eigenwerte für $n = 9$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–2.036780283
2	–0.9141634222
3	–0.6336007264
4	–0.5286433551
5	0.5069136414
6	0.5685217999
7	0.7382453930
8	1.244724160
9	6.054782793

Tab. 4.9: Eigenwerte für $n = 9$

Die Summe der Eigenwerte ist 5, das Produkt 1.

5.10 Eigenwerte für $n = 10$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–2.246979604
2	–1
3	–0.6820799717
4	–0.5549581321
5	–0.5056476667
6	0.5232463680
7	0.6051519434
8	0.8019377358
9	1.368584327
10	6.690745000

Tab. 4.10: Eigenwerte für $n = 10$

Die Summe der Eigenwerte ist 5, das Produkt –1.

Bemerkenswert der zweite Eigenwert (–1). Die Beträge der Eigenwerte Nr. 1 und 4 erscheinen auch bei $n = 3$.

5.11 Eigenwerte für $n = 11$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–2.457533658
2	–1.086802863
3	–0.7325436927
4	–0.5851927020
5	–0.5192553987
6	0.5047008106
7	0.5451306577
8	0.6445697078
9	0.8670314918
10	1.493073874
11	7.326821772

Tab. 4.11: Eigenwerte für $n = 11$

Die Summe der Eigenwerte ist 6, das Produkt –1.

5.12 Eigenwerte für $n = 12$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–2.668355706
2	–1.174317328
3	–0.7844072518
4	–0.6180339887
5	–0.5377636535
6	–0.5039739854
7	0.5162179357
8	0.5705765018
9	0.6859005740
10	0.9331373584
11	1.618033989
12	7.962985555

Tab. 4.12: Eigenwerte für $n = 12$

Die Summe der Eigenwerte ist 6, das Produkt 1.
Wir haben wieder einmal den Goldenen Schnitt (Eigenwerte Nr. 4 und 11).

5.13 Eigenwerte für $n = 13$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–2.879385242
2	–1.262371984
3	–0.8372985116
4	–0.6527036447
5	–0.5595140301
6	–0.5138509180
7	0.5034038367
8	0.5320888862
9	0.5984527759
10	0.7286063282
11	1
12	1.743355524
13	8.599216979

Tab. 4.13: Eigenwerte für $n = 13$

Die Summe der Eigenwerte ist 7, das Produkt 1.
Der 11. Eigenwert ist 1.

5.14 Eigenwerte für $n = 14$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–3.090578746
2	–1.350846955
3	–0.8909685038
4	–0.6887095107
5	–0.5835278199
6	–0.5276191915
7	–0.5029483045
8	0.5119695639
9	0.5509184021
10	0.6280672720
11	0.7723364114
12	1.067444471
13	1.868960884
14	9.235502027

Tab. 4.14: Eigenwerte für *n* = 14

Die Summe der Eigenwerte ist 7, das Produkt –1.

5.15 Eigenwerte für $n = 15$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–3.301904104
2	–1.439655738
3	–0.9452438923
4	–0.7257242491
5	–0.6091889269
6	–0.5440946186
7	–0.5104489194
8	0.5025785681
9	0.5240325211
10	0.5718555900
11	0.6589715287
12	0.8168520064
13	1.135346594
14	1.994793332
15	9.871830308

Tab. 4.15: Eigenwerte für $n = 15$

Die Summe der Eigenwerte ist 8, das Produkt -1.

5.16 Eigenwerte für $n = 16$

Wir erhalten die Eigenwerte:

k	Eigenwert
1	–3.513337092
2	–1.528734257
3	–1
4	–0.7635211184
5	–0.6360893473
6	–0.5625338197
7	–0.5211085581
8	–0.5022743371
9	0.5092019425
10	0.5385795677
11	0.5943511444
12	0.6908615233
13	0.8619843877
14	1.203615624
15	2.120810390
16	10.50819395

Tab. 4.16: Eigenwerte für $n = 16$

Die Summe der Eigenwerte ist 8, das Produkt 1.
Und wieder mal den Eigenwert –1.

5.17 Summe und Produkt

Für gegebenes n ist die Summe aller Eigenwerte $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Das Produkt der Eigenwerte ist durch (2) gegeben (Satz von Vieta).

5.18 Spezielle Eigenwerte

Wir untersuchen, für welche Werte von n und an welcher Stelle k eine vorgegebene spezielle Zahl als Eigenwert erscheint.
Wir sehen einige Regelmäßigkeiten.
Eigenwert 1:

n	1	7	13	19	25	31	37	
k	1	6	11	16	21	26	31	

Tab. 5.1: Eigenwert 1

Eigenwert –1:

n	4	10	16	22	28	
k	1	2	3	4	5	

Tab. 5.2: Eigenwert –1

Eigenwert $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895$ (Goldener Schnitt):

n	2	12	22	32	42	
k	2	11	20	29	38	

Tab. 5.3: Eigenwert Goldener Schnitt

Eigenwert $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033988749895$ (Goldener Schnitt):

n	2	12	22	32	42	
k	1	4	7	10	13	

Tab. 5.4: Eigenwert Goldener Schnitt

Eigenwert $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033988749895$ (Goldener Schnitt):

n	7	17	27	37	47	
k	5	12	19	26	33	

Tab. 5.5: Eigenwert Goldener Schnitt

Eigenwert $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618033988749895$ (Goldener Schnitt):

n	7	17	27	37	47	
k	1	2	3	4	5	

Tab. 5.6: Eigenwert Goldener Schnitt

5.19 Eigenwerte mit vertauschten Vorzeichen

Es gibt Eigenwerte, die mit vertauschtem Vorzeichen erscheinen. Gegenüberstellungen:

k	Eigenwert	k	Eigenwert
1	–0.8019377358	1	–2.246979604
2	0.5549581321	2	–1
3	2.246979604	3	–0.6820799717
		4	–0.5549581321
		5	–0.5056476667
		6	0.5232463680
		7	0.6051519434
		8	0.8019377358
		9	1.368584327
		10	6.690745000

Tab. 5.7: Entgegengesetzt gleiche Eigenwerte

k	Eigenwert	k	Eigenwert
1	–1	1	–2.879385242
2	–0.5320888862	2	–1.262371984
3	0.6527036447	3	–0.8372985116
4	2.879385242	4	–0.6527036447
		5	–0.5595140301
		6	–0.5138509180
		7	0.5034038367
		8	0.5320888862
		9	0.5984527759
		10	0.7286063282
		11	1
		12	1.743355524
		13	8.599216979

Tab. 5.8: Entgegengesetzt gleiche Eigenwerte

k	Eigenwert	k	Eigenwert
1	–1.203615624	1	–3.513337092
2	–0.5943511444	2	–1.528734257
3	0.5211085581	3	–1
4	0.7635211184	4	–0.7635211184
5	3.513337092	5	–0.6360893473
		6	–0.5625338197
		7	–0.5211085581
		8	–0.5022743371
		9	0.5092019425
		10	0.5385795677
		11	0.5943511444
		12	0.6908615233
		13	0.8619843877
		14	1.203615624
		15	2.120810390
		16	10.50819395

Tab. 5.9: Entgegengesetzt gleiche Eigenwerte

Daraus folgt dieVermutung, dass sich *jeder* Eigenwert beliebig oft wiederholt. Die Tabelle 5.10 illustriert den Einstieg zum einfachsten Beispiel. Die Einträge in der ersten Teiltabelle erscheinen wieder in der dritten Teiltabelle.

k	Eigenwert	*k*	Eigenwert	*k*	Eigenwert
1	–0.8019377358	1	–2.246979604	1	–6.690745000
2	0.5549581321	2	–1	2	–2.879385242
3	2.246979604	3	–0.6820799717	3	–1.846105213
		4	–0.5549581321	4	–1.368584327
		5	–0.5056476667	5	–1.095984918
		6	0.5232463680	6	–0.9215803947
		7	0.6051519434	7	–0.8019377358
		8	0.8019377358	8	–0.7160894227
		9	1.368584327	9	–0.6527036447
		10	6.690745000	10	–0.6051519434
				11	–0.5693324044
				12	–0.5426076046
				13	–0.5232463680
				14	–0.5101142974
				15	–0.5024970206
				16	0.5006223130
				17	0.5056476667
				18	0.5159547201
				19	0.5320888862
				20	0.5549581321
				21	0.5859666507
				22	0.6272482874
				23	0.6820799717
				24	0.7556456124
				25	0.8565403340
				26	1
				27	1.215695791
				28	1.569924515
				29	2.246979604
				30	4.021112298
				31	20.05560075

Tab. 5.10: Sich wiederholende Eigenwerte

6 Charakteristische Polynomkurven

Die Abbildung 2 zeigt die ersten fünf charakteristischen Polynomkurven.

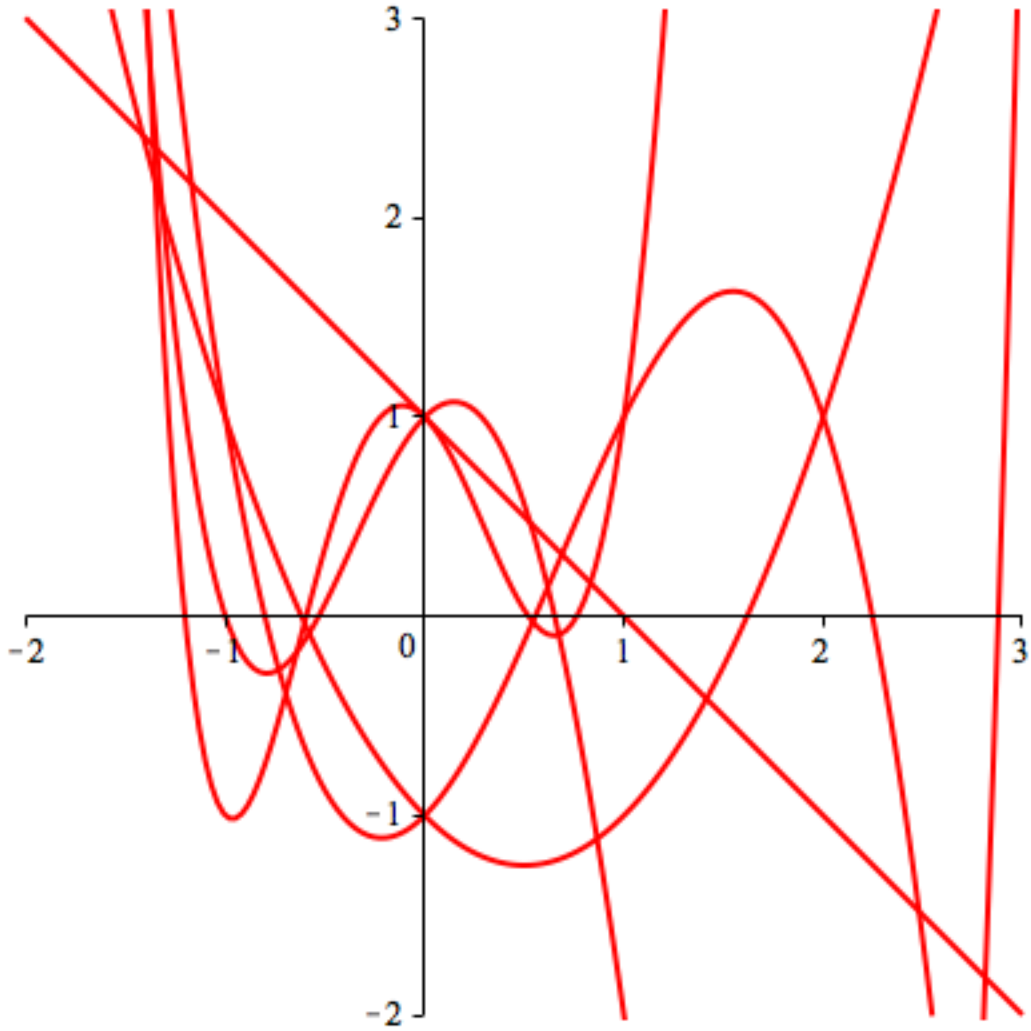

Abb. 2: Die ersten fünf Polynomkurven

Die Abbildung 3 zeigt die ersten 20 Polynomkurven in der Färbung rot für geraden Grad, blau für ungeraden Grad.

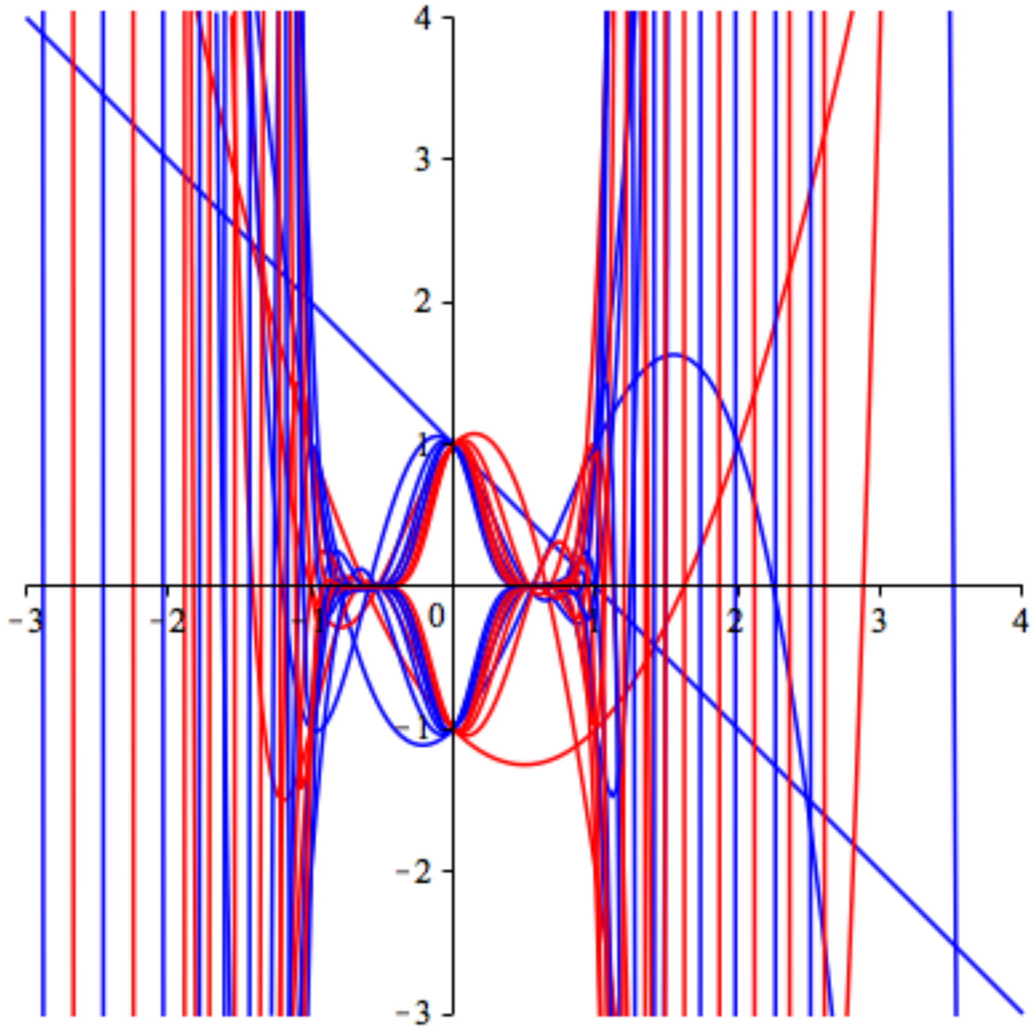

Abb. 3: Die ersten 20 Polynomkurven

Die Abbildung 4 zeigt die 20 ersten Polynomkurven in der hinkenden Färbung gemäß Tabelle 1.

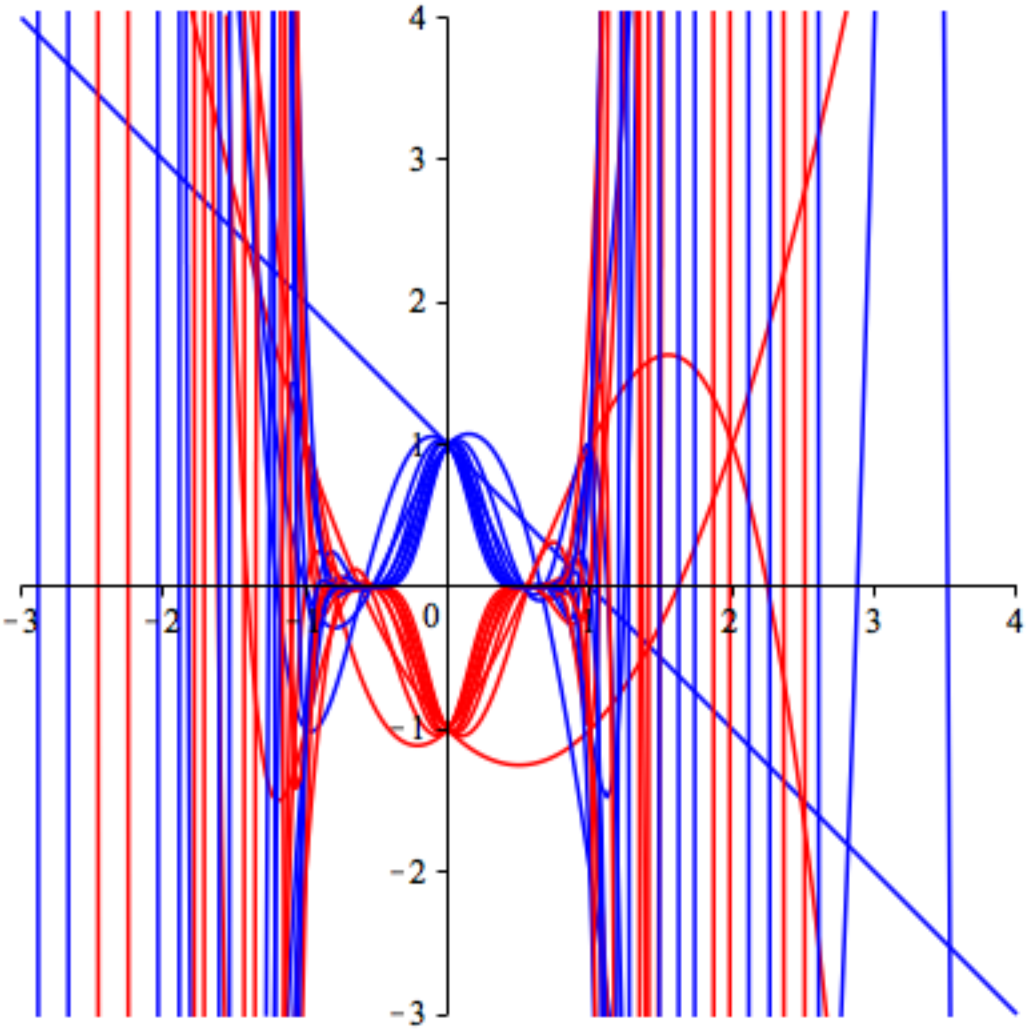

Abb. 4: Hinkende Färbung

Literatur

Walser, Hans (2012): Fibonacci. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.