Hans Walser, [20190829]

Hüpfball

Anregung: Capelli 2018, S. 81, Aufg. 256

1 Worum geht es?

Die Abbildung 1 zeigt das (vereinfachte) Weg-Zeit-Diagramm eines senkrecht auf- und abspringenden Hüpfballes. Die horizontale Achse ist die Zeitachse. Die vertikale Achse gibt die jeweilige Hüpfhöhe.

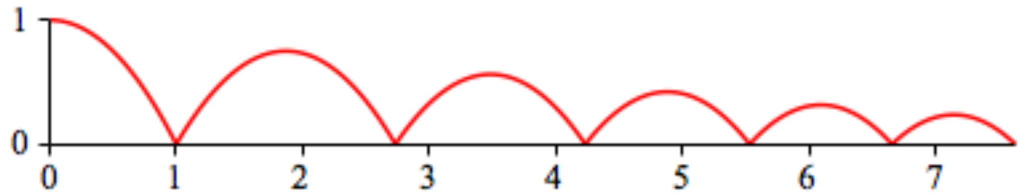

Abb. 1: Hüpfball

Die Vereinfachung besteht darin, dass die Deformationszeit zwischen Aufprall und Absprung vernachlässigt wird.

Die Höhen der Parabelbögen reduzieren sich als Folge der verbrauchten Deformationsenergie von Bogen zu Bogen um 25%. Die Höhen bilden also eine geometrische Folge mit dem Faktor $f = \frac{3}{4}$.

In der Abbildung 2 sind die Hochpunkte der Parabelbögen eingezeichnet.

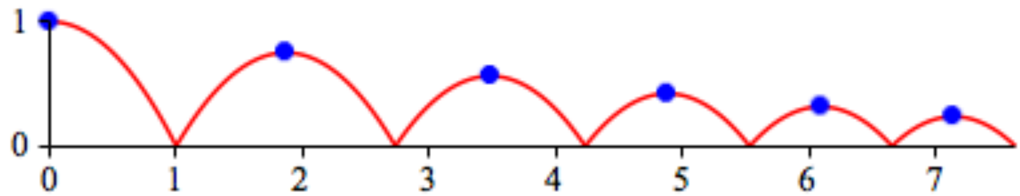

Abb. 2: Hochpunkte

Auf welcher Kurve liegen diese Hochpunkte?

2 Eine falsche Vermutung

Die Höhen dieser Hochpunkte nehmen exponentiell ab. Daraus könnte man vermuten, dass die Hochpunkte auf einer Exponentialkurve liegen.

Dies wäre dann richtig, wenn die horizontalen Abstände zwischen den Hochpunkten konstant wären.

Nun ist es aber so, dass die Spannweiten der Parabelbögen abnehmen, und zwar mit dem Faktor $q=\sqrt{f}=\sqrt{\frac{3}{4}}$. Dies kann durch horizontale Schnitte durch die Standardparabel eingesehen werden.
Wir haben also in der horizontalen Richtung ein differentiell exponentielles und damit auch global ein exponentielles Wachstum.

3 Analyse der Situation

Wie verhält sich eine Kurve, deren Parameterdarstellung sowohl für die x-Koordinate wie auch für die y-Koordinate eine Exponentialfunktion ist?
Bei zwei gleichen Exponentialfunktionen haben wir die Gerade $y=x$.

3.1 Allgemein

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t} \\ y(t) &= \mathrm{e}^{\mu t} \end{aligned} \tag{1}$$

Nun ist:

$$y=\mathrm{e}^{\mu t}=\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}=x^{\frac{\mu}{\lambda}} \tag{2}$$

Wir haben es also mit einer Potenzfunktion mit dem Exponenten $\frac{\mu}{\lambda}$ zu tun. Die zugehörige Kurve ist eine verallgemeinerte Parabel.

3.2 Einfachstes Beispiel

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a^t, a>0 \\ y(t) &= a^{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x)=x^2, x>0 \tag{3}$$

Wir erhalten den rechten Ast einer quadratischen Parabel (Abb. 3 für $a=3$). Für $t=-\infty$ erhalten wir den Ursprung, für $t=0$ den Punkt mit den Koordinaten $(1,1)$.

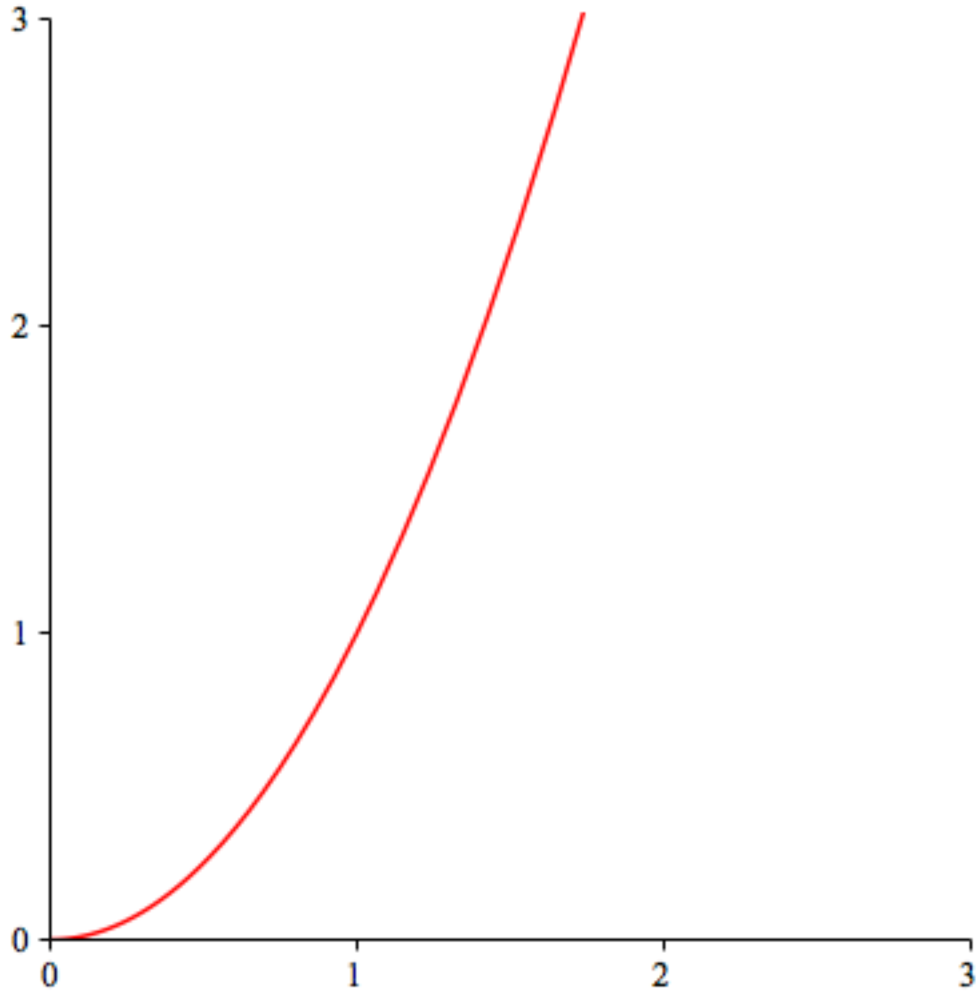

Abb. 3: Parabelast

4 Zurück zum Hüpfball

Mit einiger Rechnung erhalten wir für die Kurve durch die Hochpunkte des Diagramms des Hüpfballs die Gleichung:

$$y=\left(\frac{q-1}{q+1}x+1\right)^2 \tag{4}$$

Es handelt sich also um eine quadratische Parabel (Abb. 4).

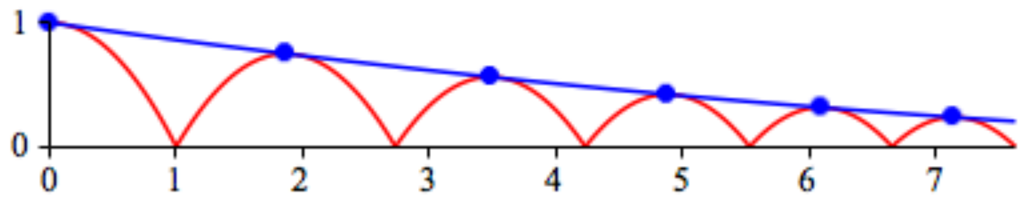

Abb. 4: Die Hochpunkte liegen auf einer quadratischen Parabel

Die Parabel hat eine Nullstelle (Abb. 5) bei

$$x_0 = \frac{1+q}{1-q} \approx 13.9282 \tag{5}$$

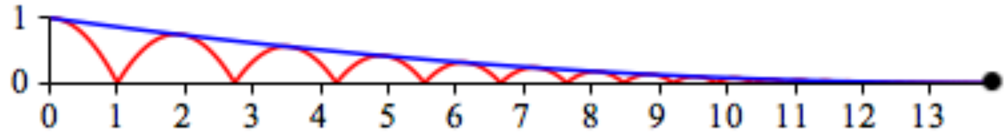

Abb.5: Nullstelle

Die Hüpferei kommt nach unendlich vielen Bögen aber in endlicher Zeit zum Stillstand.

5 Variante

Die Abbildung 6 zeigt die Situation für $f = \frac{1}{4}$.

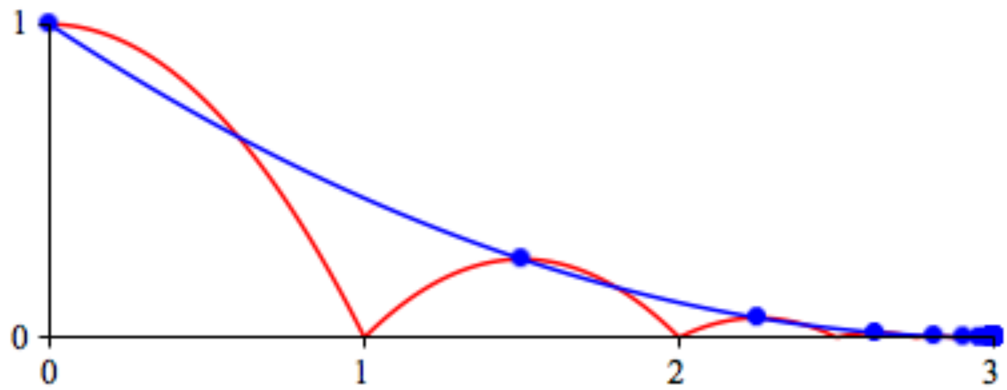

Abb. 6: Variante

Literatur

Capelli Bruno, DPK Deutschschweizerische Physikkommission (2018): Physik anwenden und verstehen. Orell Füssli. ISBN 978-3-280-04009-6.