Hans Walser, [20210605]

Hyperboloid-Stern

1 Worum geht es?

Mit drei Rotationshyperboloiden bauen wir einen dem Kepler-Stern (stella octangula) verwandten Stern.

2 Rotationshyperboloid

Unser Rotationshyperboloid (Abb. 1) hat eine gleichseitige Hyperbel als Profilkurve und die z-Achse als Rotationsachse.

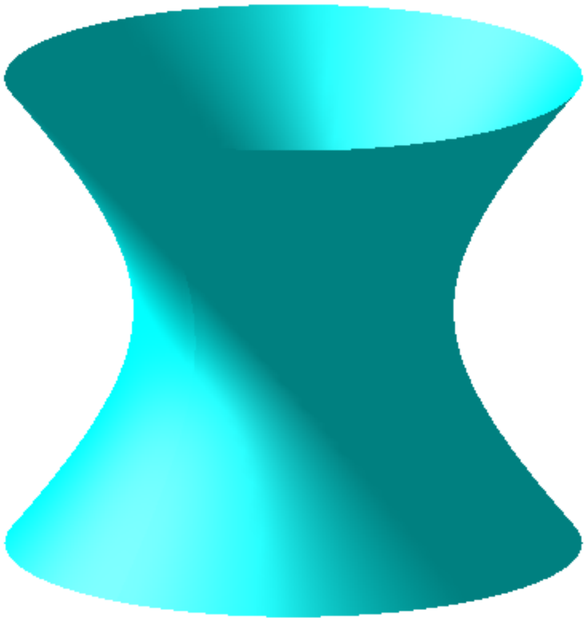


Abb. 1: Rotationshyperboloid

Das Rotationshyperboloid enthält zwei Geradenscharen (Abb. 2). Es ist eine *Regelfläche*. Die Geraden haben gegenüber der Rotationsachse einen Winkel von 45°.

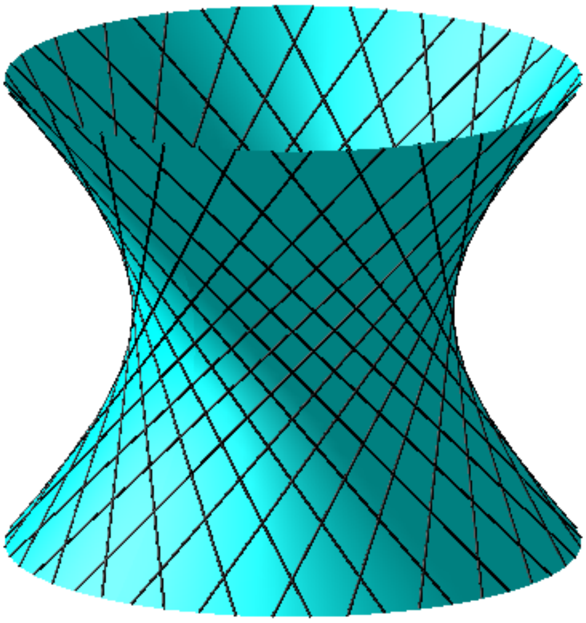


Abb. 2: Geradenscharen

3 Hyperboloide mit orthogonalen Achsen

Wir arbeiten nun weiter mit drei Hyperboloiden, welche paarweise orthogonale Achsen haben (Abb.3).

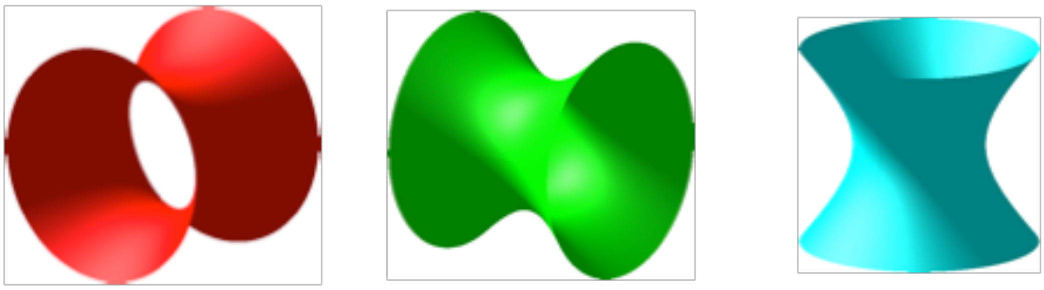


Abb. 3: Orthogonale Achsen

In der Abbildung 4 sind alle drei Hyperboloide mit gemeinsamem Zentrum gezeichnet.

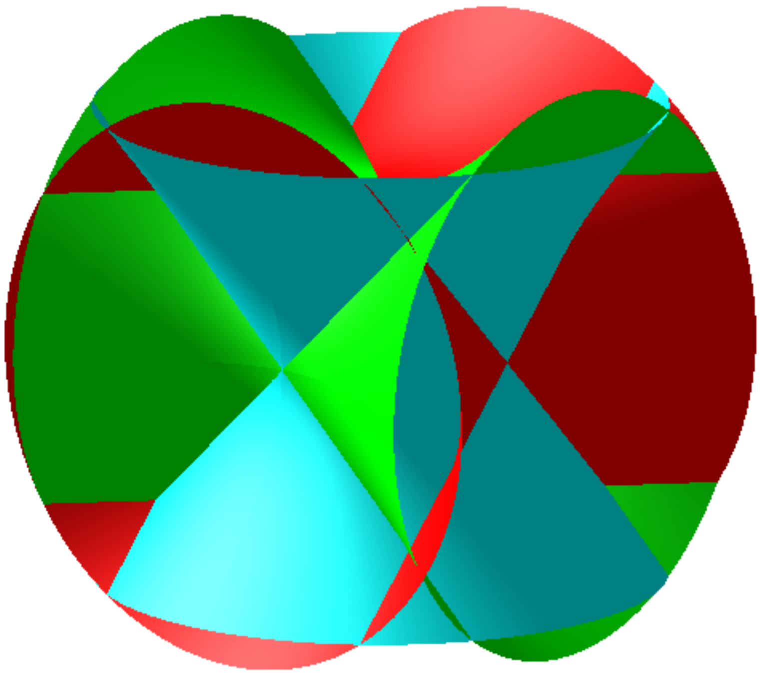


Abb. 4: Gemeinsames Zentrum

4 Schnittfigur

Wir bilden nun den Durchschnitt aller drei Hyperboloide (Abb. 5). Es entsteht ein Stern.

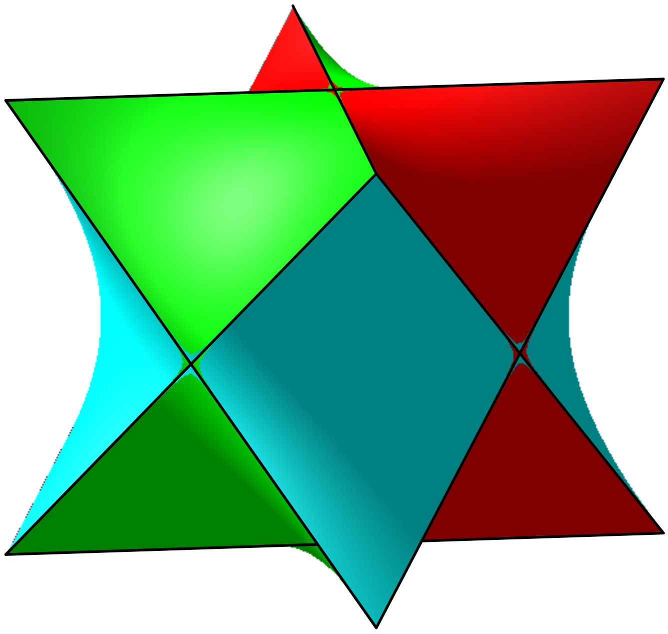


Abb. 5: Hyperboloid-Stern

Die Seitenflächen können als *hyperbolische Rhomben* bezeichnet werden. Es sind zwölf Stück. Wir haben also ein hyperbolisches Rhombendodekaeder.

In der Abbildung 6 sind zusätzlich die Geradenscharen eingezeichnet.

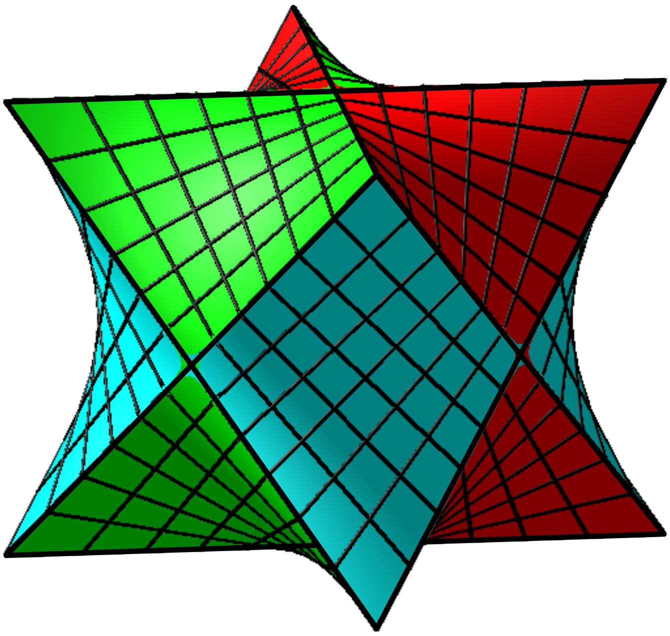


Abb. 6: Geradenscharen

5 Vergleich mit Kepler-Stern

Wir sehen die Analogie zum Kepler-Stern (Abb. 7). Statt zwei gleichseitigen Dreiecken (zum Beispiel die hellblauen Dreiecke mit gemeinsamer Kante) haben wir einen hyperbolischen Rhombus.

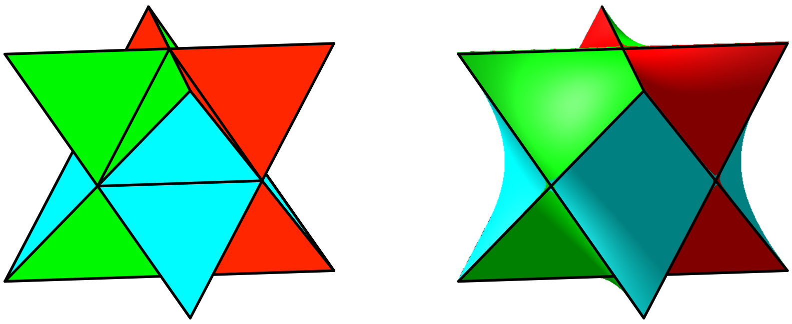


Abb. 7: Vergleich mit Kepler-Stern

Beide Figuren passen in einen Würfel (Abb. 8). Der Kepler-Stern liegt im Hyperboloid-Stern.

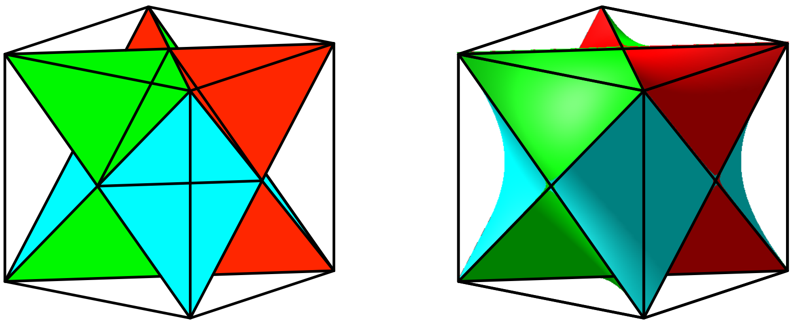


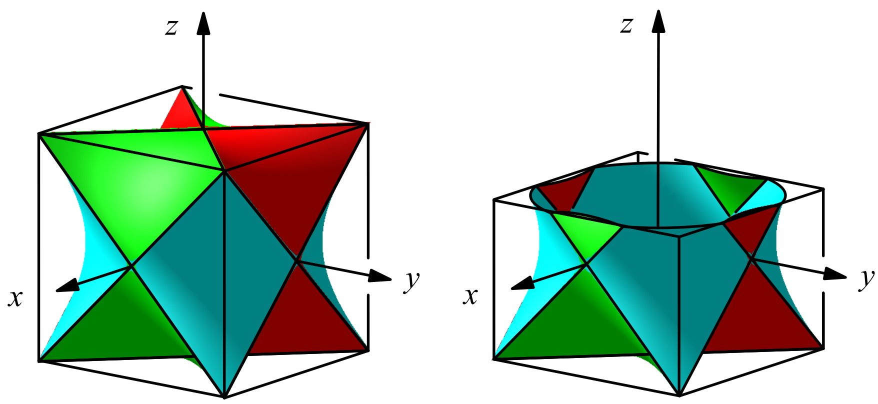
Abb. 8: Im Würfel

6 Volumen

Das Volumen des Kepler-Sterns ist die Hälfte des Würfelvolumens.

Für die Volumenberechnung des Hyperboloid-Sterns verwenden wir ein Koordinatensystem (Abb. 9a) mit dem Ursprung in der Würfelmitte. Die Einheitspunkte sind die Schnittpunkte der Seitenflächendiagonalen. Der Würfel hat also die Kantenlänge $a = 2$ und damit das Volumen 8.

Entsprechend hat der Kepler-Stern das Volumen 4.



a) b)

Abb. 9: Koordinatensystem. Horizontaler Schnitt

Nun schneiden wir den Hyperboloid-Stern horizontal auf der Höhe h (Abb. 9b für die Höhe $h = 0.4$).

Die Abbildung 10a zeigt die Niveaulinie für diese Höhe $h = 0.4$. Beim hellblauen Hyperboloid mit der z-Achse als Drehachse liegen die Niveaulinien auf Kreisen. Da die Seitenflächendiagonalen des Quadrates einen Neigungswinkel 45° haben, können wir die Höhe h direkt ablesen (Abb. 10b) und damit den Kreisradius bestimmen.

Bei den beiden anderen Hyperboloiden liegen die Niveaulinien auf gleichseitigen Hyperbeln.

Zusätzlich sind auch die Niveaulinien des innenliegenden Kepler-Sterns eingezeichnet.

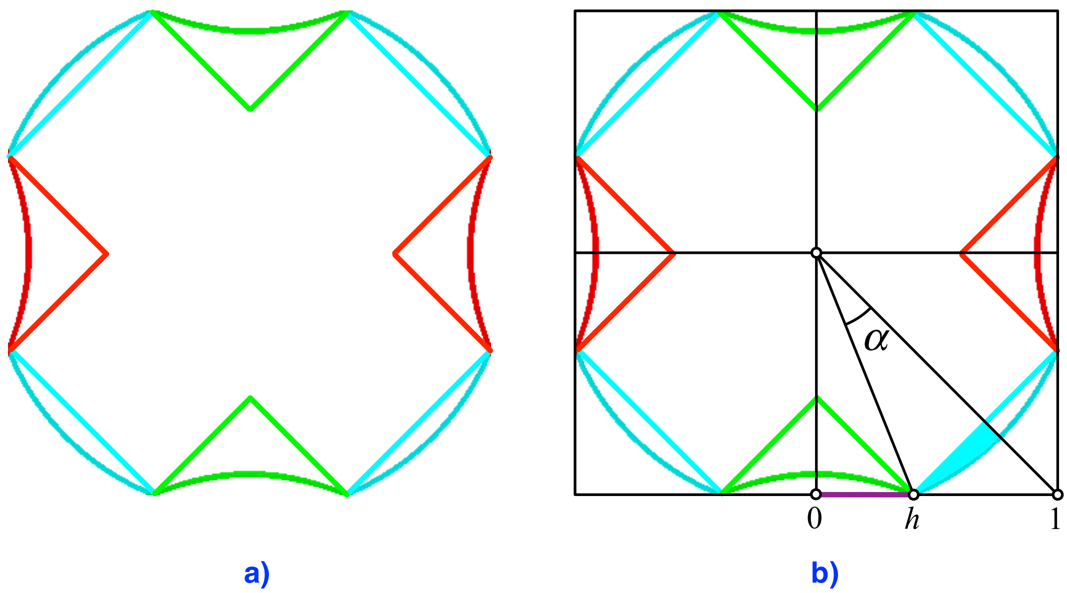


Abb. 10: Niveaulinie

Das Volumen des Hyperboloid-Sterns berechnen wir nun wie folgt. Wir gehen aus vom Volumen des Kepler-Sterns und berechnen unter jedem hyperbolischen Rhombus das Differenzvolumen zum Keplerstern. Dazu müssen wir beispielsweise das in der Abbildung 10b hellblau eingezeichnete halbe Kreissegment für h von 0 bis 1 aufintegrieren. Dies liefert einen Viertel des Differenzvolumens unter diesem hellblauen hyperbolischen Rhombus.

Im Formeln:

Der Radius r des hellblauen Niveaukreises ist:

$$r = \sqrt{h^2 + 1} \tag{1}$$

Weiter ist:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \arctan(h) \tag{2}$$

Für den Flächeninhalt A des halben Kreissegmentes ergibt sich:

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\alpha - \tfrac{1}{2}r^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{3}$$

Also wegen (1) und (2):

$$A(h) = \tfrac{1}{2}\left(1+h^2\right)\left(\tfrac{\pi}{4} - \arctan(h) - \sin\left(\tfrac{\pi}{4} - \arctan(h)\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \arctan(h)\right)\right) \tag{4}$$

Das gesamte Differenzvolumen $V_{\text{Differenz}}$ ist nun:

$$V_{\text{Differenz}} = 48\int_0^1 A(h)\,\mathrm{d}h = -4 + 8\ln(2) \tag{5}$$

Der Autor gesteht, dass er das Integral (5) mit CAS ermittelt hat.
Wegen dem Volumen 4 des Kepler-Sterns erhalten wir schließlich für das Volumen V des Hyperboloid-Sternes:

$$V_{\text{Hyperboloid-Stern}} = 8\ln(2) \tag{6}$$

Für einen dem Einheitswürfel einbeschriebenen Hyperboloid-Stern ergibt sich entsprechend das Volumen ln(2), und für einen dem Würfel mit der Kantenlänge a einbeschriebenen Hyprboloid-Stern erhalten wir:

$$V_{\text{Hyperboloid-Stern}} = a^3\ln(2) \tag{7}$$

Websites

Hans Walser: Kepler-Stern-Abwicklung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kepler-Stern-Abwicklung/Kepler-Stern-Abwicklung.htm
Hans Walser: Paraboloid-Stern
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Paraboloid-Stern/Paraboloid-Stern.htm
Hans Walser: Pyramidoid

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyramidoid/Pyramidoid.htm
Hans Walser: Sphäroid
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Sphaeroid/Sphaeroid.htm
Hans Walser: Paraboloid-Stern