Hans Walser, [20160511]

Hyperwürfel

1 Die Folge

Wir studieren die Folge a_n:

$$a_n = (p+2)^n \tag{1}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_1 &= p+2\\
a_2 &= p^2+4p+4\\
a_3 &= p^3+6p^2+12p+8\\
a_4 &= p^4+8p^3+24p^2+32p+16\\
a_5 &= p^5+10p^4+40p^3+80p^2+80p+32\\
a_6 &= p^6+12p^5+60p^4+160p^3+240p^2+192p+64\\
a_7 &= p^7+14p^6+84p^5+280p^4+560p^3+672p^2+448p+128\\
a_8 &= p^8+16p^7+112p^6+448p^5+1120p^4+1792p^3+1792p^2+1024p+256
\end{aligned} \tag{2}$$

2 Link zum Hyperwürfel

Die Koeffizienten von p^k auf der rechten Seite von a_n sind die Anzahlen der Bauteile im n-dimensionalen Hyperwürfel. Der Exponent k von p^k gibt die Dimension des betreffenden Bauteils.

Beispiele:

Koeffizienten bei a_2: Das Quadrat hat 1 Quadrat (sich selber), 4 Kanten und 4 Ecken.

Koeffizienten bei a_3: Der Würfel hat 1 Würfel, 6 Seitenquadrate, 12 Kanten und 8 Ecken.

Koeffizienten bei a_4: Der 4-dimensionale Hyperwürfel hat 1 Hyperwürfel, 8 Seitenwürfel, 24 Quadrate, 32 Kanten und 16 Ecken.

Die Abbildung 1 zeigt ein Bild des 4-dmensionalen Hyperwürfels.

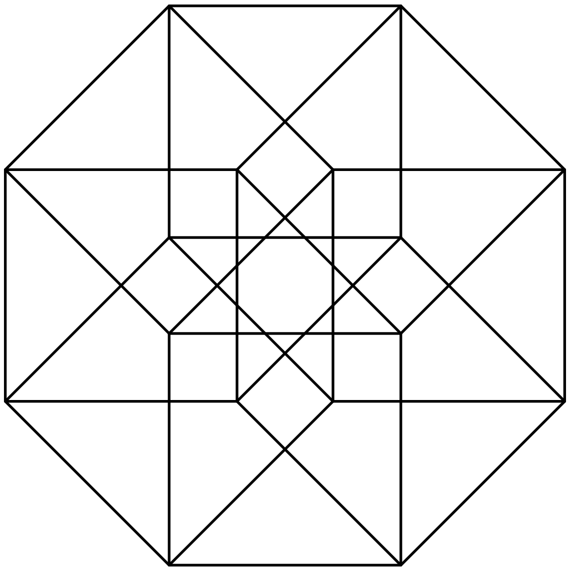

Abb. 1: Vierdimensionaler Hyperwürfel

3 Hintergrund

Die Anzahl der k-dimensionalen Bauteile im n+1-dimensionalen Hyperwürfel setzt sich rekursiv zusammen aus der Anzahl der k–1-dimensionalen Bauteile im n-dimensionalen Hyperwürfel plus dem Doppelten der Anzahl der k-dimensionalen Bauteile im n-dimensionalen Hyperwürfel. Die Multiplikation von a_n mit dem Faktor $(p + 2)$ leistet genau diese Rekursion.