Hans Walser, [20180321]

Invariantes Produkt

Anregung: K. H., Gö.

1 Worum geht es?

Ein elementargeometrisches Beispiel eines invarianten Produktes führt zu einer Konstruktion der Bernoullischen Lemniskate.

2 Einheitskreis mit Gigampfi

Wir passen einen Einheitskreis in einen Streifen ein (Abb. 1).

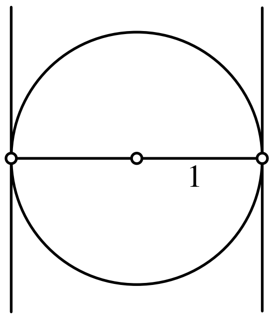

Abb. 1: Einheitskreis im Streifen

Eine weitere Tangente an den Einheitskreis (Gigampfi, Wippe) führt zu den Tangentenabschnitten p und q (Abb. 2).

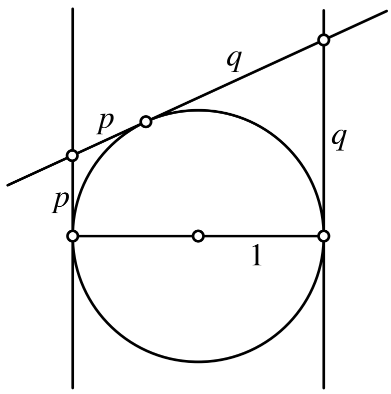

Abb. 2: Gigampfi

3 Invariantes Produkt

In der Situation der Abbildung 2 gilt:

$$pq = 1 \tag{1}$$

4 Beweise

4.1 Pythagoras

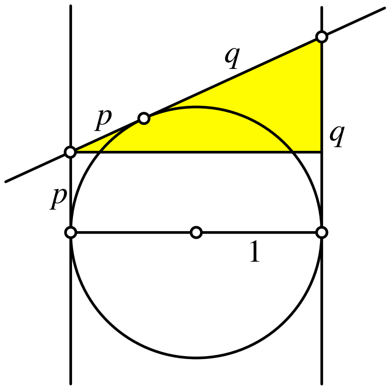

Abb. 3: Pythagoras

Im markierten rechtwinkligen Dreieck (Abb. 3) gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$(p+q)^2 = 2^2 + (p-q)^2 \tag{2}$$

Durch Umformen ergibt sich (1).

4.2 Höhensatz

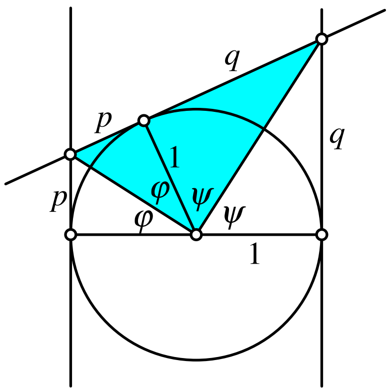

Abb. 4: Höhensatz

Das markierte rechtwinklige Dreieck (Abb. 4) hat die Hypotenusenhöhe 1 und die Hypotenusenabschnitte p und q. Aus dem Höhensatz ergibt sich (1).

4.3 Trigonometrie

Die Winkel φ und ψ ergänzen sich auf 90°. Es ist daher:

$$p = \tan(\varphi), \quad q = \tan(\psi) = \frac{1}{\tan(\varphi)} \tag{3}$$

Daraus ergibt sich (1).

5 Lemniskate

Die in der Abbildung 5 blau eingezeichneten Kreise schneiden sich in der rot eingezeichneten Bernoullischen Lemniskate.

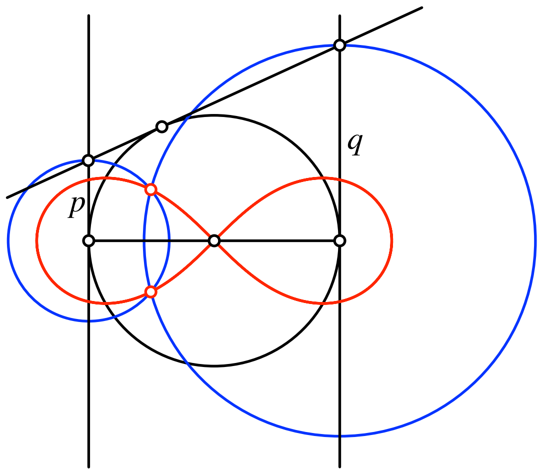

Abb. 5: Lemniskate

Reelle Schnittpunkte gibt es allerdings nur, wenn sich er Berührungspunkt der Gigampfi im rot markierten Bereich des Einheitskreises (Abb. 6) befindet.

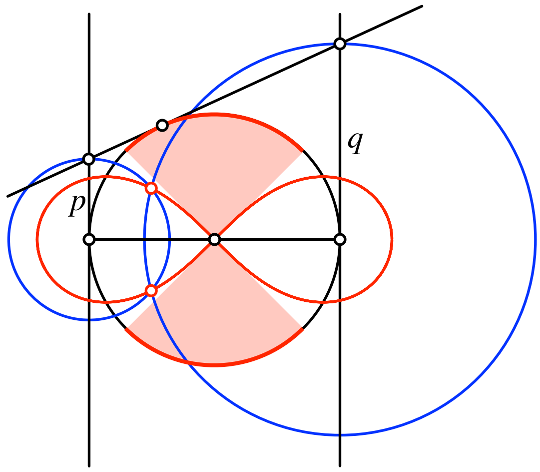

Abb. 6: Bereich für reelle Lemniskatenpunkte