Hans Walser, [20080816a]

Irrationaler Goldener Schnitt

Anregung: J. N.

1 Worum es geht

Der goldene Schnitt mit $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875$ und $\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.61803398875$ ist irrational. Es werden einige grafisch-geometrische Folgerungen daraus gezogen. Als Kontrast wird jeweils das entsprechende Beispiel mit den rationalen Zahlen $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ und $\frac{3}{5} = 0.6$ bearbeitet.

2 Punktraster

2.1 Eindimensionale Punktreihen

2.1.1 Abstandsverhältnis im goldenen Schnitt

Die folgende Figur zeigt separat zwei eindimensionale Punktreihen (blau und rot) mit dem Abstandsverhältnis des goldenen Schnittes. In der Überlagerung der beiden Reihen stimmen die Anfangspunkte überein, aber alle weiteren Punkte stimmen nicht überein, und das gilt auch, wenn wir die Reihen beliebig weit fortsetzen. Die Überlagerung der beiden Reihen ist aperiodisch.

Punktreihen im Abstandsverhältnis des goldenen Schnittes

2.1.2 Rationales Abstandsverhältnis

Wenn wir hingegen das rationale Abstandsverhältnis $\frac{3}{5}$ wählen, kommen auf drei Abstände in der blauen Reihe genau fünf Abstände in der roten Reihe, und die entsprechenden Punkte liegen wieder exakt aufeinander.

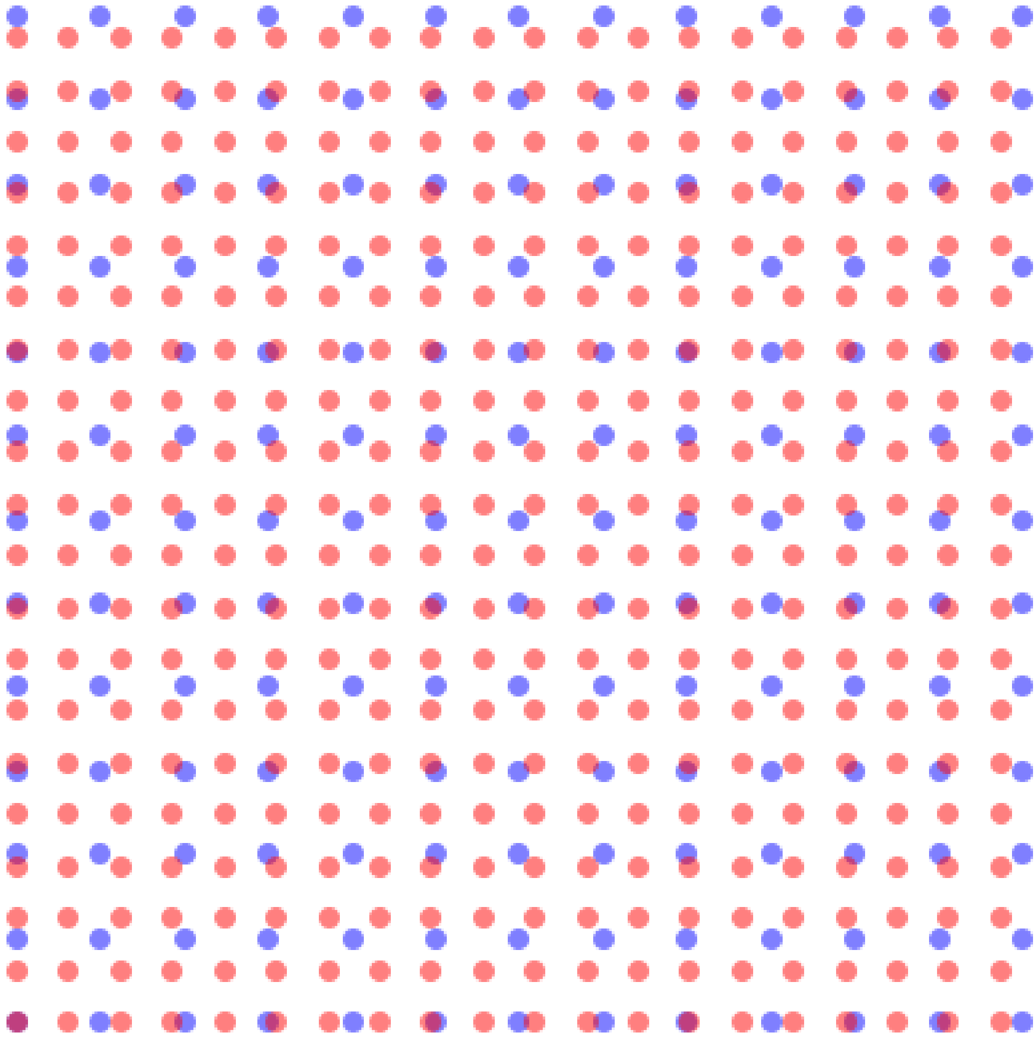
Rationales Abstandsverhältnis

Die Überlagerung der beiden Reihen ist also periodisch.

2.2 Zweidimensionale Punktraster

2.2.1 Maschenweiten im Verhältnis des goldenen Schnittes

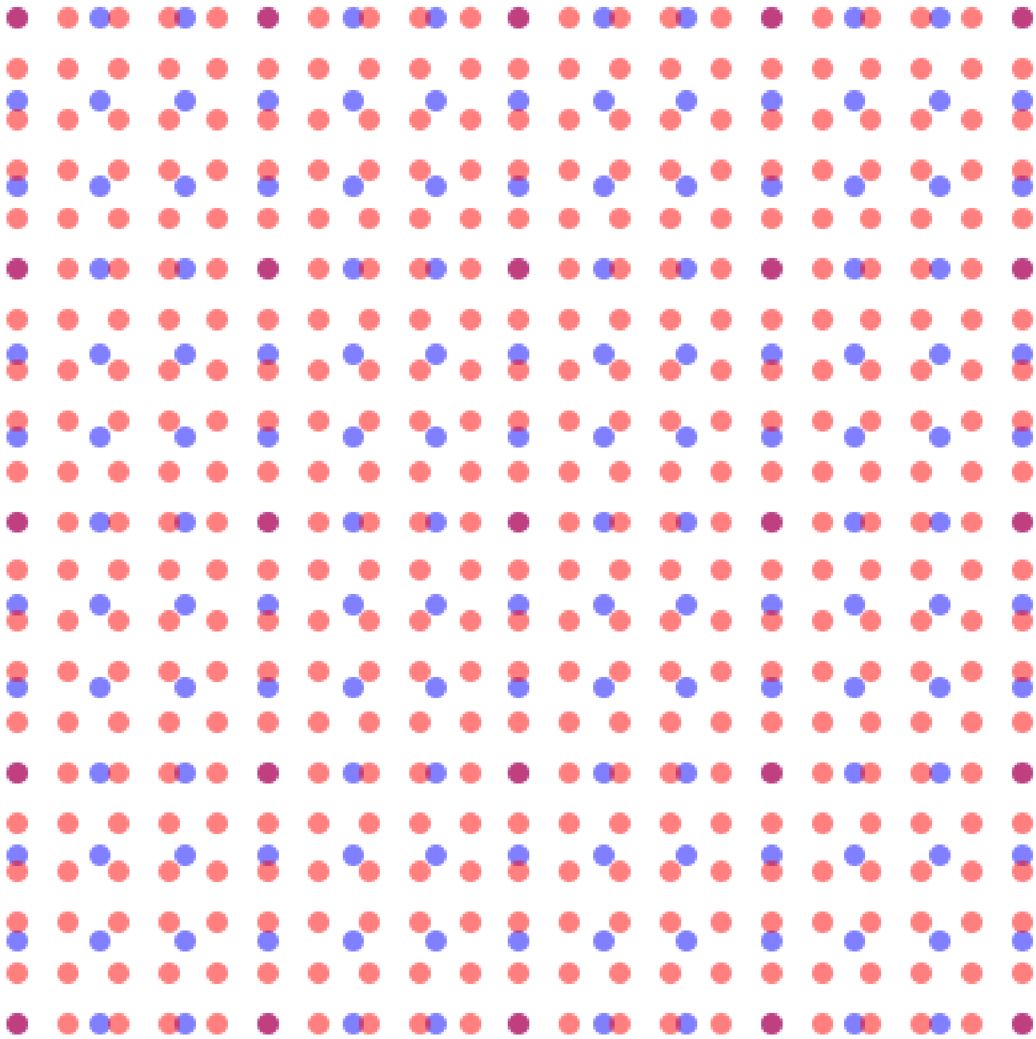
Die folgende Figur zeigt die Überlagerung zweier quadratischer Punktraster, deren Maschenweite im Verhältnis des goldenen Schnittes steht. Der Überlagerungsraster ist aperiodisch. Nur die Punkte links unten stimmen überein.



Maschenweiten im Verhältnis des goldenen Schnittes

2.2.2 Rationales Verhältnis der Maschenweite

Bei einem rationalen Verhältnis der Maschenweite ergibt sich ein periodischer Überlagerungsraster.

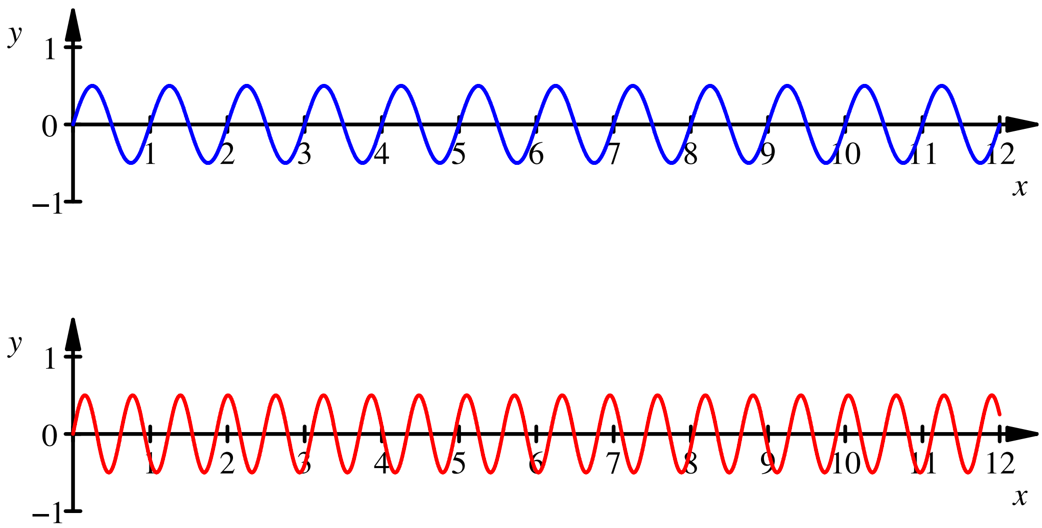


Rationales Verhältnis der Maschenweite

3 Sinusfunktionen

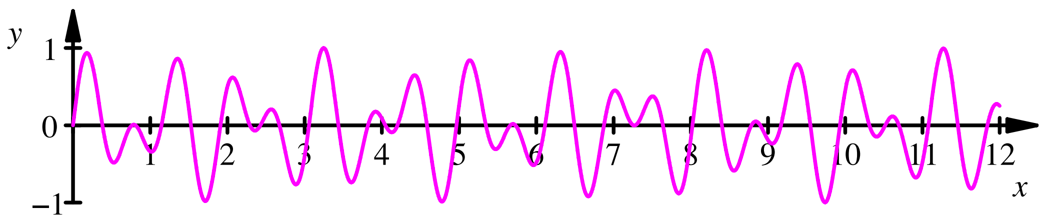
3.1 Frequenzen im Verhältnis des goldenen Schnittes

Die Figuren zeigen einzeln zwei Sinuswellen, deren Frequenzen im Verhältnis des goldenen Schnittes stehen. Jede der beiden Wellen ist periodisch.



Frequenzen im Verhältnis des goldenen Schnittes

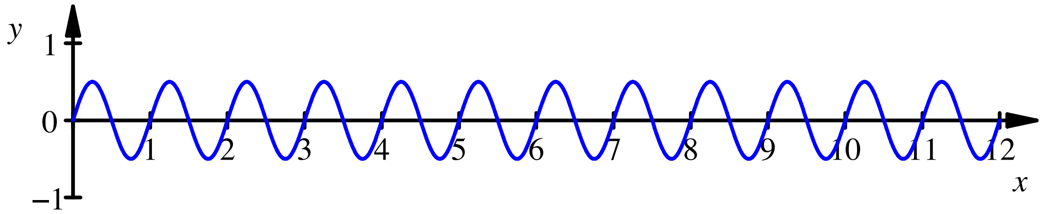
Die additive Überlagerung der beiden Wellen ist aperiodisch.

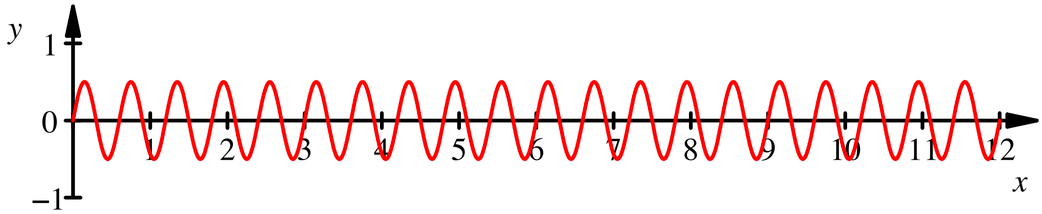


Aperiodische additive Überlagerung

3.2 Rationales Frequenzenverhältnis

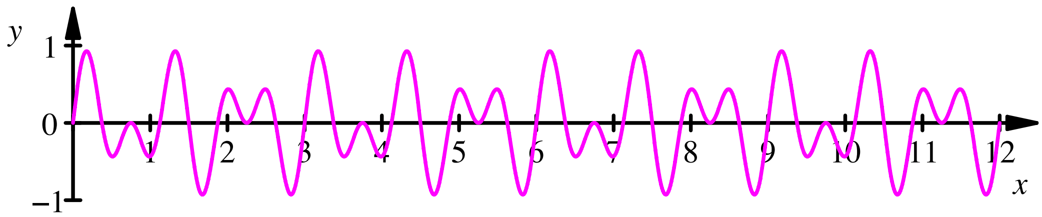
Nun arbeiten wir mit Frequenzen in einem rationalen Verhältnis.





Frequenzen in rationalem Verhältnis

Die additive Überlagerung ist periodisch. Die Periodenlänge ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Periodenlängen der einzelnen Funktionen.



Periodische Überlagerung

4 Bemerkungen

Die vorstehenden Überlegungen können auch mit einer anderen irrationalen Zahl, zum Beispiel mit $\sqrt{2}$, durchgeführt werden.

Da der Computer nur mit einer endlichen Stellenzahl rechnet, kennt er eigentlich keine irrationalen Zahlen. Die computergenerierten Figuren sind daher nur näherungsweise richtig.