

Hans Walser, [20160829]

## KO-Turnier

Anregung: M. L., F.

### 1 Problemstellung

An einem KO-Turnier nehmen  $2^n$  Spieler teil.

Die Paarungen für die erste Runde werden zufällig zusammengestellt.

Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für 16 Spieler. Der beste Spieler ist mit 1 bezeichnet, der schlechteste mit 16.

Wie geht es in der zweiten Runde weiter?

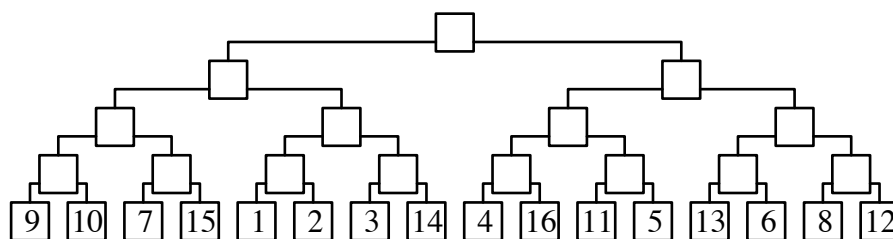


Abb. 1: Beispiel einer Ausgangslage

Fragen:

- Wie viele Runden braucht das Turnier?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $P_b$  kommt der zweitbeste Spieler ins Finale?
- Welches ist der schlechteste Spieler, der noch ins Finale kommen kann? Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $P_c$  kommt dieser Spieler ins Finale?

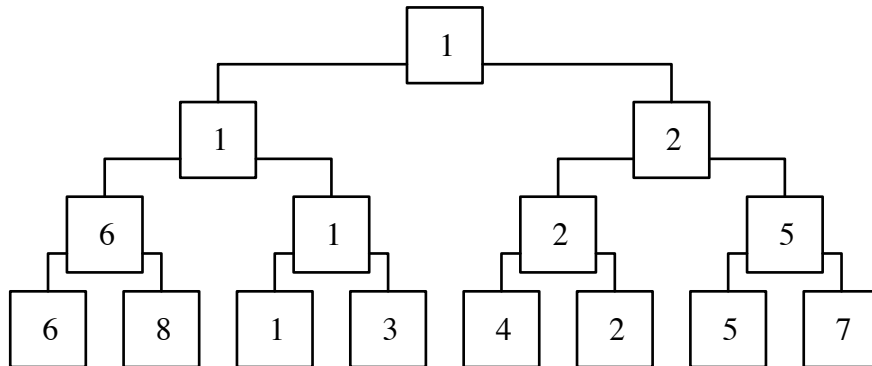
### 2 Ergebnisse

- Es braucht  $n$  Runden
- $P_b = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$
- Der Spieler mit dem Rang  $2^{n-1} + 1$  ist der schlechteste Spieler, der noch ins Finale kommen kann. Das ist der beste Spieler in der rangmäßig zweiten Hälfte. Dieser Spieler kommt mit der Wahrscheinlichkeit  $P_c = \frac{2}{\binom{2^n}{2^{n-1}}}$  ins Finale.

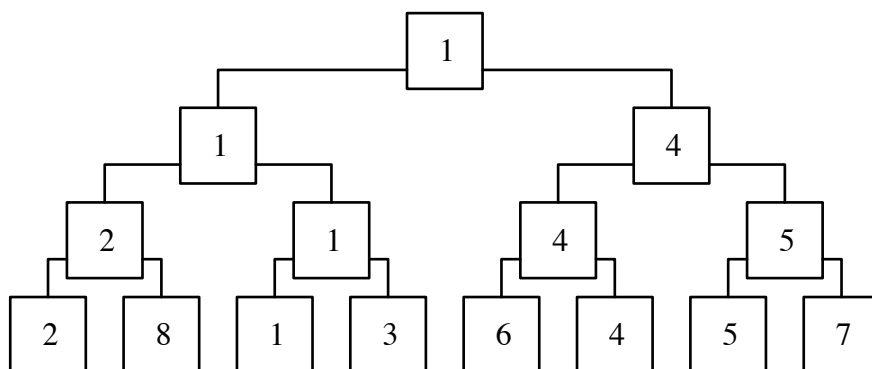
### 3 Bearbeitung

- Beweis induktiv. Jede Verdoppelung der Spielerzahl benötigt eine zusätzliche Runde.
- Der zweitbeste Spieler kommt ins Finale, wenn er bei der ersten Runde nicht in derselben Baumhälfte des Turnier-Organigramms ist wie der beste Spieler. Es gibt dazu  $2^{n-1}$  günstige und  $2^n - 1$  mögliche Fälle. Die Abbildung 2 zeigt einen

für den zweitbesten Spieler günstigen Fall, die Abbildung 3 einen für den zweitbesten Spieler ungünstigen Fall.

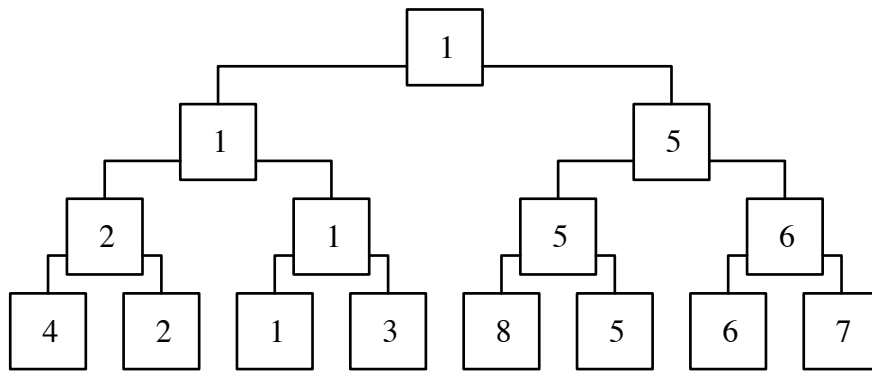


**Abb. 2: Der zweitbeste Spieler kommt ins Finale**

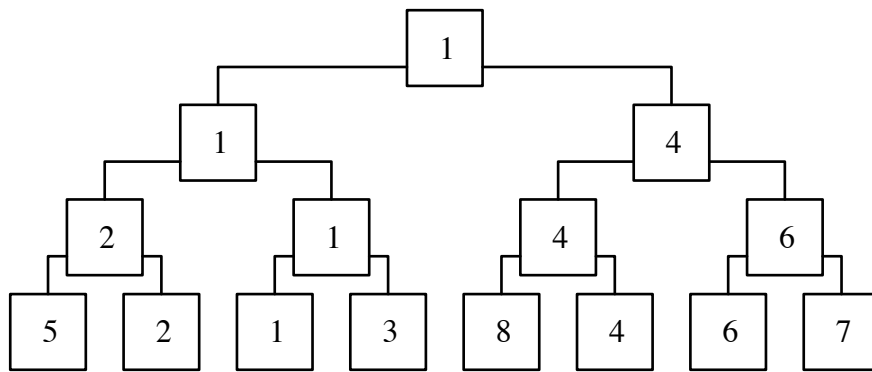


**Abb. 3: Der zweitbeste Spieler kommt nicht ins Finale**

- c) Der beste Spieler in der rangmäßig zweiten Hälfte kommt dann ins Finale, wenn in der ersten Runde alle besseren Spieler in der anderen Hälfte des Turnier-Organigramms sind. Für einen noch schlechteren Spieler kann diese Bedingung nicht erfüllt sein. Es geht jetzt darum, die  $2^n$  Spieler in zwei Gruppen zu je  $2^{n-1}$  Spieler aufzuteilen. Dazu gibt es  $\binom{2^n}{2^{n-1}}$  Möglichkeiten. Zwei davon sind günstig (Bester Spieler in der ersten Hälfte und Spieler im Rang  $2^{n-1} + 1$  in der zweiten Hälfte oder umgekehrt). Die Abbildung 4 zeigt einen für den Spieler im Rang  $2^{n-1} + 1$  günstigen Fall, die Abbildung 5 einen ungünstigen Fall.



**Abb. 4: Günstiger Fall für den besten Spieler in der rangmäßig zweiten Hälfte**



**Abb. 5: Ungünstiger Fall für diesen Spieler**

Die Tabelle 1 gibt die Werte für die Wahrscheinlichkeiten in b) und c) in Abhängigkeit von  $n$ .

$n$	Anzahl Spieler	$P_b$	$P_c$
1	2	1	1
2	4	0.6666666667	0.3333333333
3	8	0.5714285714	0.02857142857
4	16	0.5333333333	0.0001554001554
5	32	0.5161290323	$3.327341955 \cdot 10^{-9}$
6	64	0.5079365079	$1.091331253 \cdot 10^{-18}$
7	128	0.5039370079	$8.350331114 \cdot 10^{-38}$
8	256	0.5019607843	$3.467010377 \cdot 10^{-76}$
9	512	0.5009784736	$4.232326780 \cdot 10^{-153}$
10	1024	0.5004887586	$4.463035913 \cdot 10^{-307}$
$n \rightarrow \infty$		0.5	0

**Tab. 1: Numerische Werte**