

Hans Walser, [20160210]

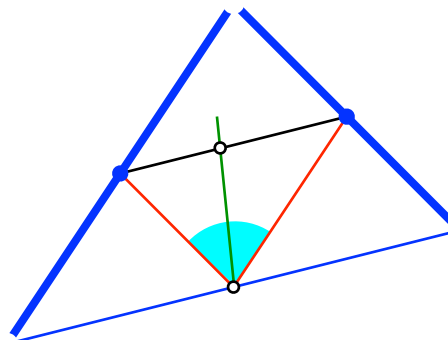
## Kantenschwerpunkt

### 1 Worum geht es?

Frage: Gibt es außer dem gleichseitigen Dreieck noch andere Dreiecke, bei denen der Kantenschwerpunkt mit dem Eckenschwerpunkt zusammenfällt?

### 2 Der Kantenschwerpunkt eines Dreieckes

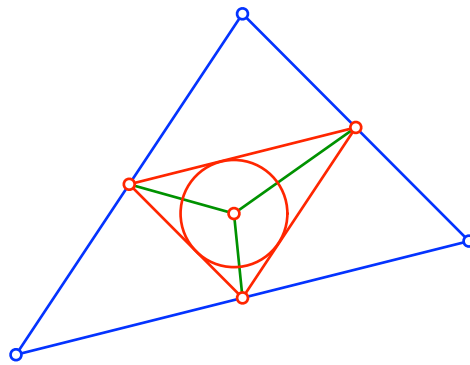
Wir konzentrieren uns zunächst auf zwei der drei Kanten (Abb. 1).



**Abb. 1: Zwei der drei Kanten**

Die beiden Kanten haben je ihren Mittelpunkt als Schwerpunkt. Wir haben nun aber in diesen Punkten unterschiedliche Massen, da die Kanten ungleich lang sind. Der Schwerpunkt dieser beiden Kanten muss also so gefunden werden, dass die beteiligten Hebelarme im umgekehrten Verhältnis zu den Seitenlängen stehen.

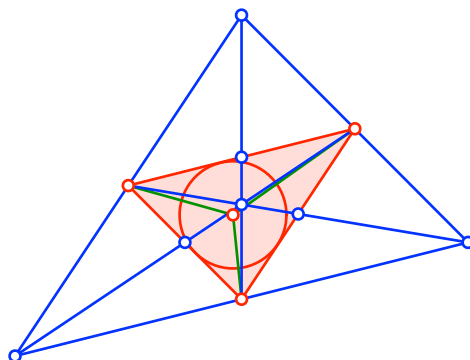
Nun sind die beiden Seitenlängen im selben Verhältnis wie die dazu parallelen Seitenlängen des Mittendreiecks. Die Winkelhalbierende des Winkels zwischen diesen beiden Seiten teilt die dritte Seite des Mittendreiecks im gewünschten Verhältnis. Da diese Winkelhalbierende auch durch den Schwerpunkt (Mittelpunkt) der dritten Seite geht, ist sie eine Schwerlinie bezüglich der Kanten. Der Kantenschwerpunkt ist daher der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Mittendreiecks, also dessen Inkreismittelpunkt (Abb. 2).

**Abb. 2: Kantenschwerpunkt**

### 3 Eckenschwerpunkt

In einem Dreieck fallen Eckenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt zusammen. Dieser Punkt, im Unterricht häufig einfach als „Schwerpunkt“ bezeichnet, ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Nun ist es aber so, dass ein Dreieck und sein Mittendreieck denselben Eckenschwerpunkt haben, da die Seitenhalbierenden zusammenfallen (blau in der Abbildung 3).

**Abb. 3: Eckenschwerpunkt**

### 4 Die Frage

Die Frage: „Gibt es außer dem gleichseitigen Dreieck noch andere Dreiecke, bei denen der Kantenschwerpunkt mit dem Eckenschwerpunkt zusammenfällt?“ ist daher äquivalent zur Frage, ob es außer dem gleichseitigen Dreieck noch andere Dreiecke gebe, in denen der Eckenschwerpunkt gleich dem Inkreismittelpunkt ist.

Dazu muss jede Seitenhalbierende zusammenfallen mit der von der gleichen Ecke ausgehenden Winkelhalbierenden. Eine solche mit der Winkelhalbierenden zusammenfallende Seitenhalbierende ist aber eine Symmetrieachse des Dreieckes.

Das einzige Dreieck mit drei Symmetrieachsen ist das gleichseitige Dreieck.

Wenn nun das Seitenmittendreieck gleichseitig ist, dann auch das ursprüngliche Dreieck.

Somit gilt:

Das gleichseitige Dreieck ist das einzige Dreieck, bei dem Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt zusammenfallen.