

Hans Walser, [20180321a], [20180405]

## Kegelaufgaben

Anregung: A. C., V. und K. H., Gö.

### 1 Worum geht es

Extremwertaufgaben mit der Kugel um- und einbeschriebenem Kegel. Vergleich mit Kugelvolumen.

### 2 Umbeschriebener Kegel

#### 2.1 Aufgabe

Der Einheitskugel soll ein Kegel minimalen Volumens umbeschrieben werden.

#### 2.2 Disposition

Die Abbildung 1 zeigt einen Achsenschnitt mit den benötigten Bezeichnungen.

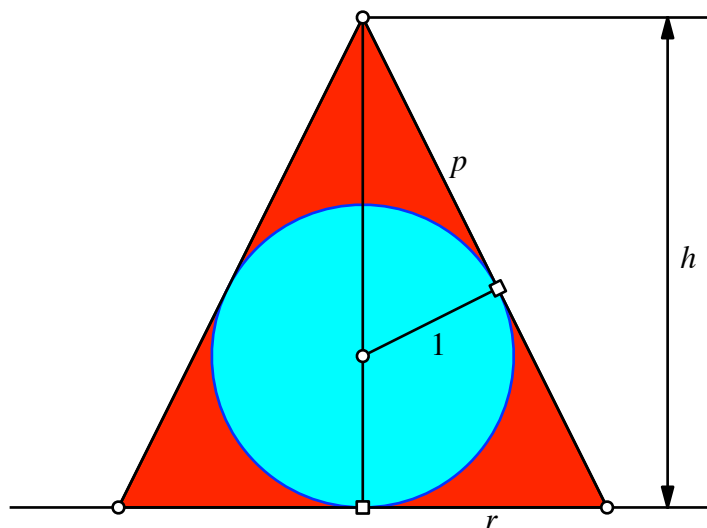


Abb. 1: Achsenschnitt

#### 2.3 Bearbeitung

Wir verwenden die Kegelhöhe  $h$  als Parameter der Aufgabe.

Zunächst ist:

$$p(h) = \sqrt{(h-1)^2 - 1} = \sqrt{h^2 - 2h} \quad (1)$$

Weiter ist:

$$\frac{r}{1} = \frac{h}{p} \Rightarrow r(h) = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2h}} \quad (2)$$

Für das Kegelvolumen  $V$  erhalten wir:

$$V(h) = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} \pi \frac{h^3}{h^2 - 2h} \quad (3)$$

Zur Berechnung des Minimums leiten wir ab:

$$\frac{dV}{dh}(h) = \frac{1}{3} \pi \frac{h^3(h-4)}{(h^2-2h)^2} \quad (4)$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert die nichttriviale Lösung  $h = 4$ . Es ist dann:

$$r(4) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad V(4) = \frac{8}{3} \pi \quad (5)$$

Das minimale Kegelvolumen ist also das Doppelte des Inkugelvolumens.  
Die Abbildung 2 zeigt die Lösung.



**Abb. 2: Minimales Kegelvolumen**

### 3 Eingeschriebener Kegel

#### 3.1 Aufgabe

Der Einheitskugel soll ein Kegel maximalen Volumens eingeschrieben werden.

#### 3.2 Disposition

Die Abbildung 3 zeigt einen Achsenschnitt mit den benötigten Bezeichnungen.

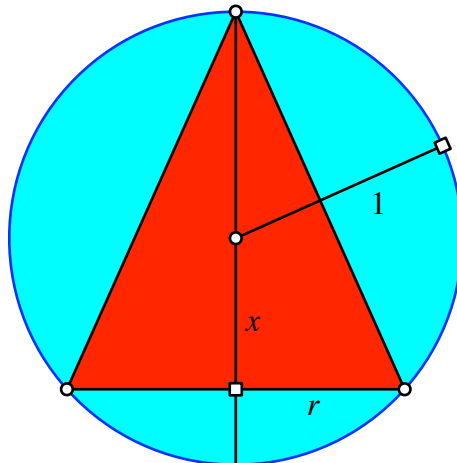


Abb. 3: Achsenschnitt

#### 3.3 Bearbeitung

Wir verwenden  $x$  als Parameter der Aufgabe. Zunächst ist:

$$r = \sqrt{1 - x^2} \quad (6)$$

Für das Kegelvolumen  $V$  erhalten wir:

$$V(x) = \frac{\pi}{3} r^2 (1 + x) = \frac{\pi}{3} (1 - x^2) (1 + x) \quad (7)$$

Zur Berechnung des Maximums leiten wir ab:

$$\frac{dV}{dx}(x) = \frac{\pi}{3} \left( -2x(1+x) + (1-x^2) \right) \quad (8)$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert für  $x$  die nichttriviale Lösung  $x = \frac{1}{3}$ . Es ist dann

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}\pi \quad \text{und} \quad r\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad (9)$$

Das maximale Kegelvolumen ist  $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$  des Kugelvolumens.

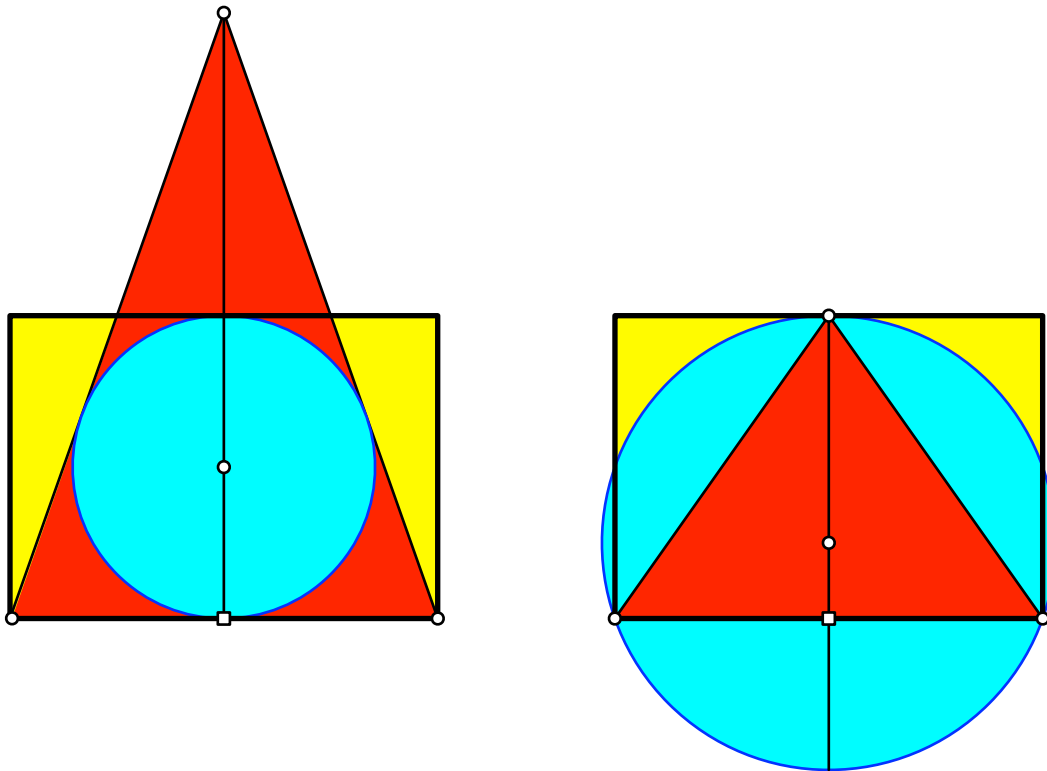
Die Abbildung 4 zeigt die Lösung.



**Abb. 4: Maximales Kegelvolumen**

#### 4 Link mit dem DIN-Format

Die Abbildung 5 zeigt die Achsenschnitte für die Extremlösungen im Vergleich mit dem DIN-Format (Walser 2013).



**Abb. 5: Link mit dem DIN-Format**

#### Literatur

Walser, H. (2013): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.